

2つの変数 x, y に関するデータが次のように与えられている. y の平均値は 4, 分散は 0.8 である.

| | | | | | |
|-----|---|-----|-----|---|---|
| 番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| x | 6 | 2 | 2 | 6 | 4 |
| y | 5 | a | b | 5 | 3 |

- (1) x の平均値は $\boxed{\text{ア}}$, 分散は $\boxed{\text{イ}}$ である.
 (2) $a = \boxed{\text{ウ}}$, $b = \boxed{\text{エ}}$ である. ただし, $a < b$ とする.
 (3) x と y の共分散は $\boxed{\text{オ}}$ である.
 (4) x と y の相関係数は $\boxed{\text{カ}}$ である.

(17 西南学院大 商・国際文化)

| | | | | | | |
|-----|---|-----|---|---|-----|------|
| 【答】 | ア | イ | ウ | エ | オ | カ |
| | 4 | 3.2 | 3 | 4 | 1.2 | 0.75 |

【解答】

- (1) x の平均値 \bar{x} は

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(6 + 2 + 2 + 6 + 4) = \frac{20}{5} = 4 \quad \dots\dots(\text{答})$$

分散 s_x^2 は

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{5}\{(6-4)^2 + (2-4)^2 + (2-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2\} \\ &= \frac{1}{5}(4 + 4 + 4 + 4 + 0) \\ &= \frac{16}{5} \\ &= \mathbf{3.2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- 分散の公式より

$$s_x^2 = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 x_k^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{5}(36 + 4 + 4 + 36 + 16) - 4^2 = \frac{96}{5} - 16 = 3.2$$

- (2) y の平均値 \bar{y} は

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(5 + a + b + 5 + 3) = \frac{a + b + 13}{5}$$

であり, $\bar{y} = 4$ であるから

$$\frac{a + b + 13}{5} = 4$$

$$\therefore a + b = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

分散は s_y^2 は

$$s_y^2 = \frac{1}{5}(25 + a^2 + b^2 + 25 + 9) - 4^2 = \frac{a^2 + b^2 + 59}{5} - 16 = \frac{a^2 + b^2 - 21}{5}$$

であり, $s_y^2 = 0.8$ であるから

$$\frac{a^2 + b^2 - 21}{5} = 0.8$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より, b を消去すると

$$a^2 + (7 - a)^2 = 25$$

$$a^2 - 7a + 12 = 0$$

$$\therefore (a - 3)(a - 4) = 0$$

$$\therefore a = 3, 4$$

(i) $a = 3$ のとき $b = 7 - 3 = 4$ これは $a < b$ を満たす.

(ii) $a = 4$ のとき $b = 7 - 4 = 3$ これは $a < b$ に反する.

(i), (ii) から

$$a = 3, \quad b = 4$$

……(答)

• $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ より

$$\text{「①かつ②」} \iff \begin{cases} a + b = 7 \\ 7^2 - 2ab = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases}$$

$$\iff a, b \text{ は } t^2 - 7t + 12 = 0 \text{ の解である}$$

(\because 解と係数の関係 (数学 II))

$$(t - 3)(t - 4) = 0 \quad \therefore t = 3, 4$$

$$a < b \text{ より} \quad a = 3, b = 4$$

(3) x と y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{5} \{(6 - 4)(5 - 4) + (2 - 4)(3 - 4) + (2 - 4)(4 - 4) \\ &\quad + (6 - 4)(5 - 4) + (4 - 4)(3 - 4)\} \\ &= \frac{2 + 2 + 0 + 2 + 0}{5} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$= 1.2$$

……(答)

(4) x と y の相関係数は

$$\frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{1.2}{\sqrt{3.2} \sqrt{0.8}} = \frac{1.2}{\sqrt{2.56}} = \frac{\frac{12}{10}}{\sqrt{\frac{2^8}{100}}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

……(答)