1 自然数の2乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

2 平面上の点Oを中心とする半径1の円を C とする。円 C の内部に点Aがある。円 C の周上を2点P，Qが条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く。線分PQの中点をRとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$|\vec{a}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする。ただし，$0<r<1$ とする。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ。

(2) 直線OA上の点Bで，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が2点P，Qの位置によらず一定であるものを求めよ。また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ。

3 正四面体ABCDの頂点を移動する点Pがある。点Pは，1秒ごとに，隣の3頂点のいずれかに等しい確率$\dfrac{a}{3}$で移るか，もとの頂点に確率$1-a$で留まる。初め頂点Aにいた点Pが，n秒後に頂点Aにいる確率をp_nとする。ただし，$0 < a < 1$とし，nは自然数とする。

(1) 数列$\{p_n\}$の漸化式を求めよ。

(2) 確率p_nを求めよ。

4 a，bを実数とし，関数$f(x)$が

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$$

を満たすとする。

(1) $f(0)$の値をaを用いて表せ。

(2) 関数$f(x)$が$x>1$の範囲で極大値を持つとする。このようなa，bが満たす条件を求めよ。また，点P$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面上に図示せよ。