

1 自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき,

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

2 関数 $f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$ について, 以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減を調べ, 最大値と最小値を求めよ。

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

3 複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする $\triangle OAB$ がある。ただし, O は原点とする。 $\triangle OAB$ の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を, それぞれ α, β, z とするとき,

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする。

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め, 点 $A(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $P(z)$ の存在範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ。

4 さいころを続けて投げて、数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに、出た目の数だけ、点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い、点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。 n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1) $p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2) p_9 の値を求めよ。

(3) p_3 の値を求めよ。

5 座標平面上の 3 点 $A(1, 0)$, $B(3, 1)$, $C(2, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の内部および境界を T とおく。実数 a に対して、条件

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする。ただし、 AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ。

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ。

(3) (1) のもとで、 D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ。