△ABC において，$\mathrm{AB}=c,\ \mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b$ とする．$\cos A=\dfrac{\sin C}{2\sin B}$ が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か．

(17 山梨大 教人科・生環 1(2))

【答】 BC=CA の二等辺三角形

【解答】

△ABC の外接円の半径を R とし，正弦定理と余弦定理を用いると，与えられた条件式は

$$\cos A=\frac{\sin C}{2\sin B}$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\dfrac{c}{2R}}{2\cdot\dfrac{b}{2R}}$$

$$b^2+c^2-a^2=c^2$$

$$(b+a)(b-a)=0$$

$a+b>0$ より　　$a=b$

よって，　　**BC = CA の二等辺三角形**　　……(答)

- $C=180^\circ-(A+B)$ だから，与えられた条件式は

$$2\cos A\sin B=\sin\{180^\circ-(A+B)\}$$

$$2\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B\quad(\because\ \text{加法定理 (数学 II)})$$

$$\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$$

$$\sin(A-B)=0$$

$-180^\circ<A-B<180^\circ$ より

$$A-B=0\qquad\therefore\quad A=B$$

よって，$a=b$ の二等辺三角形である．