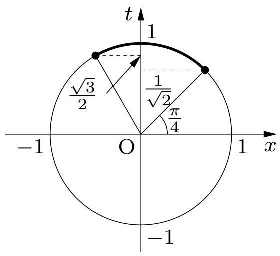
$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき，関数 $f(x) = \cos^2 x + 3\sin x + 1$ の最大値および最小値を求めよ．

(17 山梨大 工・生環 1(2))

【答】 最大値 4，最小値 $\dfrac{3+3\sqrt{2}}{2}$

【解答】

$t = \sin x$ とおく．x は $\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲を動くから，



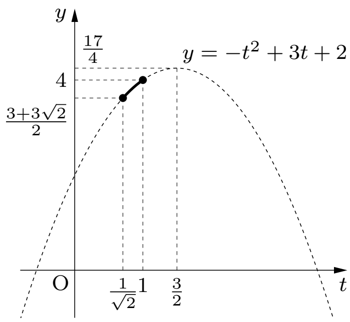
t の動く範囲は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，$f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \sin^2 x) + 3\sin x + 1 \\ &= -t^2 + 3t + 2 \\ &= -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

となる．① の範囲での $y = -t^2 + 3t + 2$ のグラフは，右図の実線部分となるから，$f(x)$ は



$t = 1$ のとき，　最大値 **4** 　　　$\cdots\cdots$(答)

$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3+3\sqrt{2}}{2}}$ 　　$\cdots\cdots$(答)

をとる．