座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2) を頂点とする △ABC の内部および境界を T とおく．実数 a に対して，条件

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする．ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す．

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ．
(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ．
(3) (1) のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ．

(17 北海道大 理 5)

【答】

(1) $a \geqq 4$
(2) $a \geqq 10$
(3) $4 \leqq a \leqq \dfrac{23}{5}$

【解答】

(1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$ より

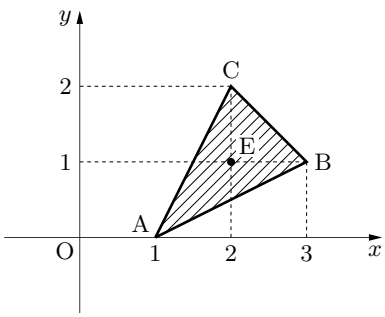
$$\{(x-1)^2+y^2\}+\{(x-3)^2+(y-1)^2\}+\{(x-2)^2+(y-2)^2\} \leqq a$$
$$3x^2-12x+3y^2-6y+19 \leqq a$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2 \leqq \frac{a-4}{3}$$

$x,\ y$ は実数であるから，D が少なくとも 1 つの点 P を含む a の値の範囲は

$$\frac{a-4}{3} \geqq 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a \geqq 4}$$ ……(答)

(2) $a=4$ のとき
　D は点 (2, 1) であるから，D は T を含まない．
$a>4$ のとき
　D は中心 (2, 1)，半径 $\sqrt{\dfrac{a-4}{3}}$ の円の周および内部である．この円の中心を E とすると

$$\mathrm{AE}=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$
$$\mathrm{BE}=1, \quad \mathrm{CE}=1$$



$\sqrt{2}>1$ から，D が T を含むための条件は

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geqq \sqrt{2}$$

これを解いて　　$a \geqq 10$
　これは $a>4$ を満たす．
　以上より，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{a \geqq 10}$ ……(答)

(3) 円の中心 E と直線 AB，BC，CA との距離をそれぞれ d_1，d_2，d_3 とする．

直線 AB の方程式は　$x-2y-1=0$,
直線 BC の方程式は　$x+y-4=0$,
直線 CA の方程式は　$2x-y-2=0$

であるから

$$d_1=\frac{|1\cdot 2+(-2)\cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$d_2=\frac{|1\cdot 2+1\cdot 1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$d_3=\frac{|2\cdot 2+(-1)\cdot 1-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，D が T に含まれるための条件は

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\leqq\frac{1}{\sqrt{5}}$$

これを解いて

$$a\leqq\frac{23}{5}$$

(1) より $a\geqq 4$ であるから，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{4\leqq a\leqq\frac{23}{5}}$　……(答)