円 $C : x^2+y^2=4$ と直線 $l : y=k$ (k は正の実数) について考える．円 C と直線 l は，異なる 2 つの点 P$(p,\ k)$，S$(s,\ k)$ で交わることとする $(s>p)$．円 C と x 軸との 2 つの交点を Q$(-2,\ 0)$，R$(2,\ 0)$ としたとき，四角形 PQRS の面積の最大値を M とする．$\dfrac{M}{\sqrt{3}}$ の値を求めよ．

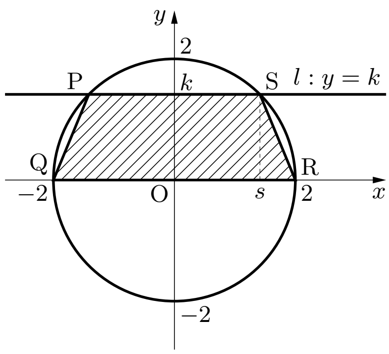
ア 0　カ 1　サ 2　タ 3　ナ 4　ハ 5　ヤ 7　ラ 8　ワ 9

(17 自治医大 24)

【答】 タ

【解答】

四角形 PQRS の面積を $f(k)$ $(0<k<2)$ とおくと



$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{1}{2}(\mathrm{PS}+\mathrm{QR})k \\ &= \frac{1}{2}(2s+4)k \\ &= k(s+2) \end{aligned}$$

であり，$s^2+k^2=4,\ s>0$ なので

$$f(k)=k(\sqrt{4-k^2}+2)$$

となる．

$$\begin{aligned} f'(k) &= 1\cdot(\sqrt{4-k^2}+2)+k\cdot\frac{-2k}{2\sqrt{4-k^2}} \\ &= \frac{(4-k^2+2\sqrt{4-k^2})-k^2}{\sqrt{4-k^2}} \\ &= \frac{2(2-k^2+\sqrt{4-k^2})}{\sqrt{4-k^2}} \\ &= \frac{2\{(4-k^2)+\sqrt{4-k^2}-2\}}{\sqrt{4-k^2}} \\ &= \frac{2(\sqrt{4-k^2}+2)(\sqrt{4-k^2}-1)}{\sqrt{4-k^2}} \\ &= \frac{2(\sqrt{4-k^2}+2)(3-k^2)}{\sqrt{4-k^2}(\sqrt{4-k^2}+1)} \end{aligned}$$

$0<k<2$ における $f(k)$ の増減は右表となり，$f(k)$ は $k=\sqrt{3}$ のとき

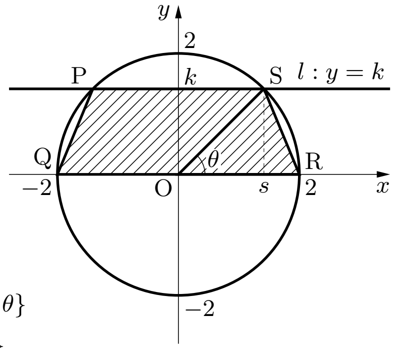
k	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(2)
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		$\nearrow$		$\searrow$	

最大値 $M=f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}$

をとる．よって

$$\frac{M}{\sqrt{3}}=3 \qquad \text{タ}$$

である．



- 図のように

$$\angle \mathrm{ROS} = \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおき，四角形 PQRS の面積を $f(\theta)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2}(\mathrm{PS} + \mathrm{QR})k \\ &= \frac{1}{2}(2 \cdot 2\cos\theta + 4) \cdot 2\sin\theta \\ &= 4(\cos\theta + 1)\sin\theta \\ f'(\theta) &= 4\{-\sin\theta \cdot \sin\theta + (\cos\theta + 1) \cdot \cos\theta\} \\ &= 4\{-(1-\cos^2\theta) + (\cos^2\theta + \cos\theta\} \\ &= 4(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) \\ &= 4(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の増減は右表となり，$f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	

$$\begin{aligned} \text{最大値 } M &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

をとる．よって

$$\frac{M}{\sqrt{3}} = 3 \qquad ㊃$$

である．