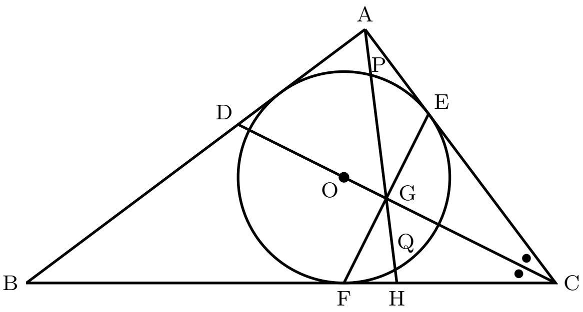
三角形 ABC において，$\angle A = 90^\circ$，$AB = 8$，$BC = 10$，$CA = 6$ とする．$\angle C$ の二等分線と AB の交点を D とおく．三角形 ABC に内接する円の中心を O とする．O は CD 上にある．内接円と CA の接点を E，BC との接点を F とする．CD と EF の交点を G，AG を延長し BC と交わる点を H とする．内接円と AH の交点のうち，A に近い方から順に P，Q とする．



(1) AD の長さを求めよ．

(2) 4 点 O，E，C，F が同一円周上にあることを示せ．

(3) 4 点 O，P，C，Q が同一円周上にあることを示せ．

(17 青森公立大 3)

【答】

(1) $AD = 3$

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) CD は $\angle C$ の二等分線であるから

$$AD : DB = AC : BC = 6 : 10 = 3 : 5$$

であり

$$AD = \frac{3}{3+5}AB = \frac{3}{8} \cdot 8 = \mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) E，F は $\triangle ABC$ の内接円とそれぞれ辺 CA，BC との接点であるから

$$\angle OEC = 90^\circ,\ \angle OFC = 90^\circ$$

である．E，F はどちらも OC を直径とする円周上の点である．

すなわち，4 点 O，E，C，F が同一円周上にある． …… (証明終わり)

(3) (2) の円の弦 OC，EF について，方べきの定理を用いると

$$GO \cdot GC = GE \cdot GF \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．P，E，Q，F は内接円上の点であるから，弦 EF，PQ について方べきの定理を用いると

$$GE \cdot GF = GP \cdot GQ \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．①，② より

$$GO \cdot GC = GP \cdot GQ$$

が成り立ち，方べきの定理の逆により，4 点 O，P，C，Q が同一円周上にある．

…… (証明終わり)