k を実数とし，楕円 $E:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $l:x-y=k$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 直線 l が楕円 E に接するための k の条件を求めよ．

(2) 直線 l と楕円 E が異なる 2 個の共有点を持つとき，k のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) k が (2) で求めた範囲を動くとき，直線 l と楕円 E の 2 個の共有点の中点 P の軌跡を求めよ．

(17 広島大 後期 総合科学 1)

【答】

(1) $k=\pm\sqrt{13}$

(2) $-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$

(3) 線分 : $\begin{cases} y=-\dfrac{4}{9}x \\ -\dfrac{9\sqrt{13}}{13}<x<\dfrac{9\sqrt{13}}{13} \end{cases}$

【解答】

$$E:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$l:x-y=k \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) l が E に接するための条件は，① と ② を連立してできる方程式

$$4x^2+9(x-k)^2=36$$

$$13x^2-18kx+9(k^2-4)=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

が重解をもつことである．③ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4}&=(-\,9k)^2-13\cdot 9(k^2-4) \\ &=9(-4k^2+52) \\ &=-36(k^2-13) \end{aligned}$$

であり，求める k の条件は

$$D=0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{k=\pm\sqrt{13}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) l と E が異なる 2 個の共有点をもつ条件は，③ が異なる 2 つの実数解をもつことであり，k のとり得る値の範囲は

$$D>0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}} \qquad \cdots\cdots ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) k が ④ を満たすとき，③ の 2 つの実数解を $x=\alpha,\ \beta$ とすると，l と E の 2 個の共有点の中点 P の座標 $(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{18k}{13}=\dfrac{9}{13}k & \cdots\cdots ⑤ \\ y=x-k & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

である．求める軌跡は「④かつ⑤かつ⑥」を満たす k が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$\text{「④かつ⑤かつ⑥」} \iff \begin{cases} k = \dfrac{13}{9}x \\ y = x - \dfrac{13}{9}x \\ -\sqrt{13} < \dfrac{13}{9}x < \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = \dfrac{13}{9}x \\ y = -\dfrac{4}{9}x \\ -\dfrac{9\sqrt{13}}{13} < x < \dfrac{9\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$

よって，求める軌跡は

$$\textbf{線分：}\begin{cases} \boldsymbol{y = -\dfrac{4}{9}x} \\ \boldsymbol{-\dfrac{9\sqrt{13}}{13} < x < \dfrac{9\sqrt{13}}{13}} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (3) の線分を図示すると下図となる．