実数 $x,\ y,\ z$ が次の 3 つの等式

$$x+y+z=0, \quad x^3+y^3+z^3=3, \quad x^5+y^5+z^5=15$$

を満たしている．$x^2+y^2+z^2=a$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $xy+yz+zx$ を a を用いて表せ．
(2) xyz の値を求めよ．
(3) a の値を求めよ．

(18 静岡大 教育・理 (生地)・農 1)

【答】

(1) $-\dfrac{a}{2}$
(2) 1
(3) 6

【解答】

(1) $x+y+z=0$ の辺々を平方すると

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$$

$x^2+y^2+z^2=a$ であるから

$$a+2(xy+yz+zx)=0$$

$$\therefore \quad xy+yz+zx=-\boldsymbol{\frac{a}{2}}$$ ……(答)

(2) 等式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

に $x^3+y^3+z^3=3,\ x+y+z=0$ を代入して

$$3-3xyz=0$$

$$\therefore \quad xyz=\mathbf{1}$$ ……(答)

- $x+y+z=0$ であるから

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3 \\ &= (-z)^3-3xy(-z)+z^3 \\ &= 3xyz \end{aligned}$$

  $x^3+y^3+z^3=3$ であるから

$$3=3xyz \qquad \therefore \quad xyz=1$$

(3) $x,\ y,\ z$ は

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-\dfrac{a}{2} \\ xyz=1 \end{cases}$$

を満たすから，3 次方程式

$$t^3 - 0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t - 1 = 0$$

すなわち

$$t^3 - \frac{a}{2}t - 1 = 0$$

の解である．辺々に t^2 を掛けると

$$t^5 = \frac{a}{2}t^3 + t^2$$

であり

$$\begin{aligned} x^5 &= \frac{a}{2}x^3 + x^2 \\ y^5 &= \frac{a}{2}y^3 + y^2 \\ z^5 &= \frac{a}{2}z^3 + z^2 \end{aligned}$$

が成り立つ．辺々加えると

$$x^5 + y^5 + z^5 = \frac{a}{2}(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2)$$

であり，与えられた条件を代入すると

$$\therefore \quad 15 = \frac{a}{2} \cdot 3 + a$$

$$\therefore \quad a = \mathbf{6}$$ ……(答)

- $(x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3)$ を展開すると

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3) \\ &= x^5 + y^5 + z^5 + x^2(y^3 + z^3) + y^2(x^3 + z^3) + z^2(x^3 + y^3) \\ &= x^5 + y^5 + z^5 + x^2y^2(x + y) + y^2z^2(y + z) + z^2x^2(z + x) \end{aligned}$$

である．与えられた条件を代入すると

$$\begin{aligned} 3a &= 15 + x^2y^2(-z) + y^2z^2(-x) + z^2x^2(-y) \\ 3a &= 15 - xyz(xy + yz + zx) \\ 3a &= 15 - 1 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \quad (\because\ (1),\ (2)) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a = 6$$