方程式

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}} = 1 - 2x^2$$

をみたす実数 x をすべて求めよ．

(18 横浜市大 医 1(2))

【答】 $x = -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【解答】

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}} = 1 - 2x^2 \iff \begin{cases} \dfrac{1+x}{2} = (1-2x^2)^2 & \cdots\cdots ① \\ 1 - 2x^2 \geqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

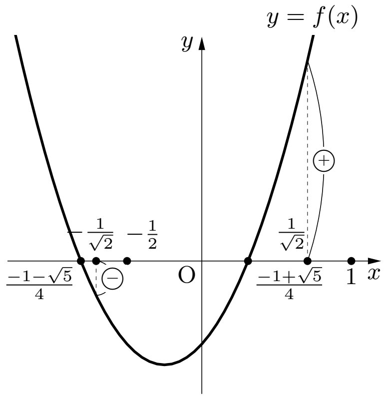
①を解くと

$$1 + x = 2(1 - 4x^2 + 4x^4)$$
$$8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0$$
$$(x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1) = 0$$
$$\therefore \quad x = 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

②より $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ここで，$f(x) = 4x^2 + 2x - 1$ とおくと

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2} < 0$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2} > 0$$



より

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < -\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{-1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であり，① かつ ② を満たす実数 x は

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 少し見方を変えてみよう．
  $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$x = \cos\theta \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi\right)$$

とおくことができる．このとき与式は

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} &= 1-2\cos^2\theta \\
\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} &= -\cos 2\theta \\
\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| &= -\cos 2\theta \\
\cos\frac{\theta}{2} &= \cos(\pi-2\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\therefore\quad \frac{\theta}{2} = \pm(\pi-2\theta)+2n\pi\ (n \text{ は整数}) \\
&\therefore\quad \theta = \frac{2}{5}(2n+1)\pi,\ -\frac{2}{3}(2n-1)\pi
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ より

$$
\begin{aligned}
&\theta = \frac{2}{5}\pi,\ \frac{2}{3}\pi \\
&\therefore\quad x = \cos\frac{2}{5}\pi,\ \cos\frac{2}{3}\pi
\end{aligned}
$$

である．

$\cos\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{2}$ であり，$\cos\dfrac{2}{5}\pi (= \cos 72^\circ = \sin 18^\circ)$ については，正五角形の対角線を利用することにより $\cos\dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ を求めることができる．