

A社はチョコレートを販売している。販売個数 y 個 (y は 1 以上の整数) は、販売価格 p 円 (1 個当たりの値段) に対して以下で定められる。

$$y = 10 - p$$

このとき次の各問に答えよ。ただし、(1) については答のみ解答欄 (省略) に記入せよ。

(1) A社の売上が最大となる販売価格 p の値、および、そのときの販売個数 y の値を求めよ。ただし、売上とは販売価格と販売個数の積とする。

(2) y 個のチョコレートの販売にかかる総費用 $c(y)$ は、

$$c(y) = y^2$$

で表される。このとき、A社の利益 (売上から総費用を引いた差) が最大となる販売価格 p の値、および、そのときの販売個数 y の値を求めよ。

(3) (2) において、総費用 $c(y)$ が変化し、

$$c(y) = y^2 + 20y - 20$$

となったとき、A社の利益が最大となる販売価格 p の値、および、そのときの販売個数 y の値を求めよ。

(18 早稲田大 政経 3)

【答】

- (1) $y = 5, p = 5$
 (2) $(p, y) = (8, 2), (7, 3)$
 (3) $(p, y) = (9, 1)$

【解答】

(1) 売上とは、販売価格 p と販売個数 y の積 py である。

$$\begin{cases} y = 10 - p \\ y \geq 1 \\ p > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 10 - y \\ y \geq 1 \\ 10 - y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 10 - y \\ 1 \leq y < 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} py &= (10 - y)y \\ &= -y^2 + 10y \\ &= -(y - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

y は $1 \leq y < 10$ を満たす整数であるから、売上 py が最大となる p, y の値は

$$y = 5, \quad p = 10 - 5 = 5 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- 売上 py を p で表すこともできるが、(2), (3) で総費用 $c(y)$ を y で表しているから、(1) でも売上を y の関数とみることにした。

(2) A 社の利益は、(売上) - (総費用) = $py - c(y)$ である。これは

$$\begin{aligned} py - c(y) &= (10 - y)y - y^2 \\ &= -2y^2 + 10y \\ &= -2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} \end{aligned}$$

であるから、 y が $1 \leq y < 10$ を満たす整数であることも考えると $y = 2, 3$ のときに利益が最大になる。 $p = 10 - y$ より、求める p と y の組は

$$(p, y) = (8, 2), (7, 3) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

(3) $c(y) = y^2 + 20y - 20$ のときの A 社の利益は

$$\begin{aligned} py - c(y) &= (10 - y)y - (y^2 + 20y - 20) \\ &= -2y^2 - 10y + 20 \\ &= -2\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{65}{2} \end{aligned}$$

これは $1 \leq y < 10$ においては単調に減少するから、 $y = 1$ のとき最大になる。 $p = 10 - y$ より、求める p と y は

$$(p, y) = (9, 1) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- $1 \leq y < 10$ においては、 $-2y^2$, $-10y$ のそれぞれが減少するから、この区間において $-2y^2 - 10y + 20$ が単調に減少することは明らかである。