a は定数とする．関数 $f(x)=x^2-2ax-a^2+2a$ について，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を a で表せ．

(2) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと y 軸との交点の座標を a で表せ．

(3) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸が共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(4) 方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつとき，すべての解が $0 \leqq x \leqq 2$ となるような a の値の範囲を求めよ．

(18 岡山理大 教育・経営 (推薦))

【答】

(1) $\left(a,\ -2a^2+2a\right)$

(2) $\left(0,\ -a^2+2a\right)$

(3) $a \leqq 0$ または $1 \leqq a$

(4) $a=0$ または $1 \leqq a \leqq -1+\sqrt{5}$

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2ax-a^2+2a \\ &= (x-a)^2-2a^2+2a \end{aligned}$$

であるから，頂点の座標は

$$\boldsymbol{\left(a,\ -2a^2+2a\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $f(0)=-a^2+2a$ であるから，y 軸との交点の座標は

$$\boldsymbol{\left(0,\ -a^2+2a\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，このグラフと x 軸が共有点をもつ条件は，頂点の y 座標が負となることである．

$$-2a^2+2a \leqq 0$$
$$a(a-1) \geqq 0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{a \leqq 0 \text{ または } 1 \leqq a} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) 方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつとき，すべての解が $0 \leqq x \leqq 2$ となる条件は

$$\begin{cases} \text{実数解をもつ：①} \\ \text{軸の位置：} 0 \leqq a \leqq 2 \qquad \cdots\cdots ② \\ \text{端点の符号：} f(0) \geqq 0 \text{ かつ } f(2) \geqq 0 \end{cases}$$

ここで

$$f(0) \geqq 0 \iff -a^2+2a \geqq 0$$
$$\therefore\quad 0 \leqq a \leqq 2 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$f(2) \geqq 0 \iff -a^2-2a+4 \geqq 0$$
$$\therefore\quad -1-\sqrt{5} \leqq a \leqq -1+\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots ④$$

①〜④ の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{a=0 \text{ または } 1 \leqq a \leqq -1+\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$