曲線 $C : y = |x^2 - x - 2| + bx + c$ が点 $(-2,\ 1)$ と点 $(1,\ 2)$ を通るとき，次の問いに答えなさい．

(1) $b,\ c$ の値を求めなさい．
(2) 曲線 C の概形を描きなさい．
(3) 曲線 C と直線 $y = x + k$ が共有点を 2 つ持つとき，k の値の範囲を求めなさい．

(18 福島大 後 理工 3)

【答】
(1) $b = 1,\ c = -1$
(2) 略
(3) $k = -1,\ \dfrac{5}{4} < k$

【解答】

$$C : y = |x^2 - x - 2| + bx + c$$

(1) C が点 $(-2,\ 1)$ と点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$\begin{cases} |4| - 2b + c = 1 \\ |-2| + b + c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2b - c = 3 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$\therefore\ \boldsymbol{b = 1,\quad c = -1}$ ……(答)

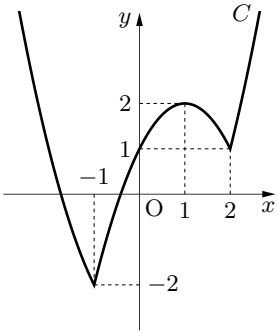
(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned} C : y &= |x^2 - x - 2| + x - 1 \\ &= |(x+1)(x-2)| + x - 1 \\ &= \begin{cases} (x^2 - x - 2) + x - 1 & (x \leqq -1,\ 2 \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2 - x - 2) + x - 1 & (-1 \leqq x \leqq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 - 3 & (x \leqq -1,\ 2 \leqq x \text{ のとき}) \\ -x^2 + 2x + 1 & (-1 \leqq x \leqq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$y = -(x-1)^2 + 2$$

であるから，曲線 C の概形は**右図**となる． ……(答)



(3) 曲線 C と直線 $y = x + k$ が共有点を 2 つ持つ条件は，

$$|x^2 - x - 2| + x - 1 = x + k$$

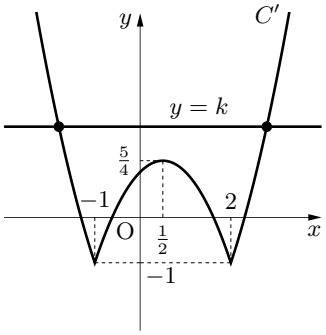
すなわち

$$|x^2 - x - 2| - 1 = k$$

が 2 つの実数解を持つことであり，それは
曲線 $C' : y = |x^2 - x - 2| - 1$ と直線 $y = k$ が共有点を 2 つ持つことである．

$$C' : y = |(x+1)(x-2)| - 1$$

C' のグラフは，$y = |(x+1)(x-2)|$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動したものであり，右図となる．



よって，求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k = -1,\ \frac{5}{4} < k}$$ ……(答)

である．