$a \fallingdotseq 0$ とし，放物線 $y=a(x-1)^2+\dfrac{1}{a}$ を C，直線 $y=x$ を L_1 とする．また，点 $(1,\ 0)$ を通り傾き m の直線を L_2 とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 L_1 が異なる 2 点で交わるように a の値の範囲を求めよ．

(2) (1) において，放物線 C が直線 L_1 から切り取る線分の長さを l とする．
$\sqrt{2} \leqq l \leqq \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ となるように，a の値の範囲を求めよ．

(3) 放物線 C と直線 L_2 が接するとき，m は a に無関係な値となることを示せ．またそのときの接点の座標を求めよ．

(18 群馬大 理工・教育・情報 1)

【答】

(1) $a > \dfrac{3}{4}$

(2) $1 \leqq a \leqq \dfrac{6}{5}$ または $2 \leqq a \leqq 3$

(3) 証明は略．接点の座標は $\left(1-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{2}{a}\right)$ または $\left(1+\dfrac{1}{a},\ \dfrac{2}{a}\right)$

【解答】

$$C : y=a(x-1)^2+\frac{1}{a} \quad (a \fallingdotseq 0)$$

$$L_1 : y=x$$

$$L_2 : y=m(x-1)$$

(1) C と L_1 が異なる 2 点で交わる条件は

$$a(x-1)^2+\frac{1}{a}=x$$

$$\therefore \quad ax^2-(2a+1)x+a+\frac{1}{a}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が異なる 2 つの実数解をもつことであり，①の判別式を D_1 とすると

$$D_1>0$$

である．

$$D_1=(2a+1)^2-4a\left(a+\frac{1}{a}\right)=4a-3$$

であるから，a の値の範囲は

$$4a-3>0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a > \frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) ①の異なる 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおき，L_1 の傾きが 1 であることに注意すると

$$l=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$$

である．①の解 $x=\dfrac{(2a+1)\pm\sqrt{D_1}}{2a}$ を代入すると

$$\beta-\alpha=\frac{(2a+1)+\sqrt{D_1}}{2a}-\frac{(2a+1)-\sqrt{D_1}}{2a}=\frac{\sqrt{D_1}}{a}=\frac{\sqrt{4a-3}}{a}$$

であるから

$$\sqrt{2} \leqq l \leqq \sqrt{\frac{5}{2}} \iff \sqrt{2} \leqq \sqrt{2}\frac{\sqrt{4a-3}}{a} \leqq \sqrt{\frac{5}{2}} \qquad \cdots\cdots ②$$

$a > \dfrac{3}{4}$ のもとで，②を変形すると

$$\begin{aligned} ② &\iff a \leqq \sqrt{4a-3} \leqq \frac{\sqrt{5}}{2}a \\ &\iff a^2 \leqq 4a-3 \leqq \frac{5}{4}a^2 \\ &\iff \begin{cases} a^2-4a+3 \leqq 0 \\ 5a^2-16a+12 \geqq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} (a-3)(a-1) \leqq 0 \\ (5a-6)(a-2) \geqq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 1 \leqq a \leqq 3 \\ a \leqq \dfrac{6}{5} \text{ または } 2 \leqq a \end{cases}$$

$$\therefore \quad 1 \leqq a \leqq \frac{6}{5} \text{ または } 2 \leqq a \leqq 3$$

これは $a > \dfrac{3}{4}$ を満たすから，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{1 \leqq a \leqq \frac{6}{5}} \textbf{ または } \boldsymbol{2 \leqq a \leqq 3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 一般に，傾きが m の直線上に 2 点 A，B があるとき，線分 AB の長さは，A，B の x 座標を α，β $(\alpha < \beta)$ とすると

  $$\sqrt{1+m^2}(\beta - \alpha)$$

  である．

(3) C と L_2 が接する条件は

$$a(x-1)^2 + \frac{1}{a} = m(x-1)$$

$$\therefore \quad ax^2 - (2a+m)x + a + \frac{1}{a} + m = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

が重解をもつことであり，③の判別式を D_2 とすると

$$D_2 = 0$$

である．

$$D_2 = (2a+m)^2 - 4a\left(a + \frac{1}{a} + m\right) = m^2 - 4$$

であるから，m の値は

$$m = \pm 2$$

である．したがって，m は a に無関係な値である． ……(証明終わり)

また，このとき③の解は $x = \dfrac{2a+m}{2a} = 1 + \dfrac{m}{2a}$ であり，接点の座標は

$$m = 2 \text{ のとき } \left(\boldsymbol{1 + \frac{1}{a},\ \frac{2}{a}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$m = -2 \text{ のとき } \left(\boldsymbol{1 - \frac{1}{a},\ \frac{2}{a}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．