以下の 2 つの 2 次関数について答えよ．

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2},\quad g(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+3a-\frac{1}{2}$$

ただし，a は定数とする．

(1) 任意の実数 x に対して，$f(x)>g(x)$ となるような a の値の範囲を求めよ．

(2) $-3\leqq x_1\leqq 3$，$-3\leqq x_2\leqq 3$ を満たす x_1，x_2 のすべての組み合わせについて，$f(x_1)<g(x_2)$ となるような a の値の範囲を求めよ．

(3) $f(x)$ と $g(x)$ が 2 つの交点を持つとき，その交点を A，B とする．線分 AB の長さが $4\sqrt{2}$ となるような a の値を求めよ．

(18 青森公立大 2)

【答】

(1) $a<-\dfrac{2}{3}$

(2) $a>\dfrac{13}{3}$

(3) $a=\dfrac{2}{3}$

【解答】

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2},$$
$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+3a-\frac{1}{2}$$

(1) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}h(x)&=\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}x^2+x+3a-\frac{1}{2}\right)\\&=x^2-3a-2\end{aligned}$$

である．任意の実数 x に対して $f(x)>g(x)$ となるための条件は，任意の実数 x に対して $h(x)>0$ となることであるから

$$(h(x)\text{ の最小値})>0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

$y=h(x)$ のグラフは下に凸であり，$x=0$ で最小となるから，求める a の値の範囲は

$$① \iff h(0)>0$$
$$\therefore\quad -3a-2>0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a<-\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $-3\leqq x_1\leqq 3$，$-3\leqq x_2\leqq 3$ を満たす x_1，x_2 のすべての組み合わせについて，$f(x_1)<g(x_2)$ となるための条件は，$-3\leqq x_1\leqq 3$ における $f(x_1)$ の最大値を M_1，$-3\leqq x_2\leqq 3$ における $g(x_2)$ の最小値を m_2 とおくと

$$M_1<m_2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たすことである．

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-3$ より

$$M_1=f(3)=\frac{1}{2}(3+1)^2-3=5$$

$g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 3a - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 3a$ より

$$m_2 = g(-3) = -\frac{1}{2}(-3-1)^2 + 3a = -8 + 3a$$

であるから，求める a の値の範囲は

$$② \iff 5 < -8 + 3a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a > \frac{13}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $f(x)$ と $g(x)$ が 2 つの交点を持つとき

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) - g(x) = 0 \\ f(x) + g(x) = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 3a - 2 = 0 \\ 2x + 3a - 3 = 2y \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{3a+2} \\ y = x + \dfrac{3}{2}(a-1) \end{cases}$$

2 交点 A，B は直線 $y = x + \dfrac{3}{2}(a-1)$ 上にあり，x 座標の差が $2\sqrt{3a+2}$ であるから，線分 AB の長さが $4\sqrt{2}$ となる条件は

$$2\sqrt{3a+2} \times \sqrt{1+1^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 直線 $y = mx + n$ 上の 2 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ 間の距離 AB は

$$\mathrm{AB} = |a_1 - a_2|\sqrt{1+m^2}$$

である．