$a,\ b$ を実数とする．

(a) $a,\ b$ がともに有理数であることは，$a+b$ が有理数であるための $\boxed{\text{(a)}}$．

(b) $a,\ b$ がともに有理数であることは，ab が有理数であるための $\boxed{\text{(b)}}$．

(c) $a \fallingdotseq 0$ とする．このとき，a が有理数であることは，$\dfrac{1}{a}$ が有理数であるための $\boxed{\text{(c)}}$．

(d) $a>0$ とする．$a,\ b$ がともに有理数であることは，a^b が有理数であるための $\boxed{\text{(d)}}$．

1. 必要十分条件である
2. 必要条件であるが十分条件ではない
3. 十分条件であるが必要条件ではない
4. 必要条件でも十分条件でもない

(18 東京理大 理 (応数) 1(1))

【答】

(a)	(b)	(c)	(d)
3	3	1	4

【解答】

(a) 「$a,\ b$ がともに有理数である」 $\overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}$ 「$a+b$ が有理数である」

$\longrightarrow$ の証：有理数 $a,\ b$ を $a=\dfrac{p}{q},\ b=\dfrac{r}{s}$ ($p,\ q,\ r,\ s$ は整数，$qs \fallingdotseq 0$) と表すと

$$a+b=\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs} \qquad \text{これは有理数である．}$$

$\longleftarrow$ の反例：$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ であるとき，$a+b=0$ は有理数であるが，a も b も無理数である．

よって，$a,\ b$ がともに有理数であることは，$a+b$ が有理数であるための

3.　十分条件ではあるが必要条件ではない． ……(答)

(b) 「$a,\ b$ がともに有理数である」 $\overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}$ 「ab が有理数である」

$\longrightarrow$ の証：有理数 $a,\ b$ を $a=\dfrac{p}{q},\ b=\dfrac{r}{s}$ ($p,\ q,\ r,\ s$ は整数，$qs \fallingdotseq 0$) と表すと

$$ab=\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs} \qquad \text{これは有理数である．}$$

$\longleftarrow$ の反例：$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$ であるとき，$ab=2$ は有理数であるが，a も b も無理数である．

よって，$a,\ b$ がともに有理数であることは，ab が有理数であるための

3.　十分条件ではあるが必要条件ではない． ……(答)

(c) $a \fallingdotseq 0$ のとき，「a が有理数である」 $\overset{\bigcirc}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ 「$\dfrac{1}{a}$ が有理数である」

$\longrightarrow$ の証：$a \fallingdotseq 0$ のとき，有理数 a を $a=\dfrac{p}{q}$ ($p,\ q$ は整数，$pq \fallingdotseq 0$) と表すと

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{\frac{p}{q}}=\frac{q}{p} \qquad \text{これは有理数である．}$$

$\longleftarrow$ の証：$a \fallingdotseq 0$ のとき，有理数 $\dfrac{1}{a}$ を $\dfrac{1}{a} = \dfrac{r}{s}$ $(r,\ s$ は整数, $s \fallingdotseq 0)$ と表すと，$\dfrac{1}{a} \fallingdotseq 0$ より $r \fallingdotseq 0$ でもあり

$$a = \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{r}{s}} = \frac{s}{r} \qquad \text{これは有理数である.}$$

よって，$a \fallingdotseq 0$ のとき，a が有理数であることは，$\dfrac{1}{a}$ が有理数であるための

1.　必要十分条件である. ……(答)

(d) $a > 0$ のとき,「$a,\ b$ がともに有理数である」 $\overset{\times}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}$ 「a^b が有理数である」

$\longrightarrow$ の反例：$a = 2,\ b = \dfrac{1}{2}$ のとき，$a > 0$ で $a,\ b$ はともに有理数であるが

$$a^b = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \qquad \text{これは無理数である.}$$

$\longleftarrow$ の反例：$a = \sqrt{2},\ b = 0$ のとき，$a > 0$ で $a^b = \sqrt{2}^0 = 1$ は有理数であるが，a は無理数である.

よって，$a > 0$ のとき，$a,\ b$ がともに有理数であることは，a^b が有理数であるための

4.　必要条件でも十分条件でもない. ……(答)