実数から実数への関数 $f(x)$ は，次の 2 つの条件を満たす．

- 任意の実数 x，y に対して，$|f(x)-f(y)|=|x-y|$
- x が整数のとき，$f(x)$ も整数

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ はどの値も固定しない，すなわち，任意の実数 x に対して $f(x)$ は x と異なるとき，$f(x)=x+n$ (n は 0 以外の整数) となることを示せ．

(2) $f(x)$ が 1 点 x_0 のみを固定するとき，すなわち，ただ 1 つの実数 x_0 に対して $f(x_0)=x_0$ となるとき，x_0 を $f(0)$ を用いて表せ．

(3) $f(x)$ が 2 点以上の点を固定するとき，すなわち，少なくとも 2 つの実数 x_1，x_2 ($x_1 \fallingdotseq x_2$) に対して $f(x_1)=x_1$ かつ $f(x_2)=x_2$ となるとき，任意の実数 x に対して $f(x)=x$ となることを示せ．

(18 福井大 医 2)

【答】

(1) 略

(2) $x_0=\dfrac{1}{2}f(0)$

(3) 略

【解答】

2 つの条件を

(a) 任意の実数 x，y に対して，$|f(x)-f(y)|=|x-y|$

(b) x が整数のとき，$f(x)$ も整数

とする．

(1) 「$f(x)$ はどの値も固定しない」ということは

「任意の実数 x に対して $f(x) \fallingdotseq x$ である」 …… $(*)$

ということである．

条件 (a) において $y=0$ とすると，任意の実数 x に対して

$$|f(x)-f(0)|=|x-0|$$
$$\therefore \quad f(x)-f(0)=\pm x$$

が成り立つ．条件 (b) より，$f(0)$ は整数であり，条件 $(*)$ より $f(0) \fallingdotseq 0$ である．したがって，$f(0)=n$ とすると

$$f(x)=\pm x+n \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以外の整数})$$

である．

(i) $f(x)=-x+n$ のとき

$$f\left(\frac{n}{2}\right)=-\frac{n}{2}+n=\frac{n}{2}$$

となり，$(*)$ に反する．

(ii) $f(x)=x+n$ のとき

$|f(x)-f(y)|=|(x+n)-(y+n)|=|x-y|$ であり，条件 (a) を満たす．

x が整数のとき，$f(x)=x+n$ は整数 ($\because$ n は整数) であり，条件 (b) を満たす．

任意の実数 x に対して $f(x)=x+n \fallingdotseq x$ ($\because$ $n \fallingdotseq 0$) であり，条件 $(*)$ を満たす．

よって，$f(x)=x+n$ (n は 0 以外の整数) である．　……(証明終わり)

(2) 「$f(x)$ が 1 点 x_0 のみを固定する」ということは

「ただ 1 つの実数 x_0 に対して $f(x_0)=x_0$ となる」 …… $(**)$

ということである．

条件 (a) において $x=x_0$，$y=0$ とすると

$$|f(x_0)-f(0)|=|x_0-0|$$
$$f(x_0)-f(0)=\pm x_0$$

条件 (b) より $f(0)$ は整数であり，$(**)$ もあわせると

$$x_0=\pm x_0+f(0) \quad (f(0) \text{ は整数})$$

である．

(i) $x_0=x_0+f(0)$ のとき

$$f(0)=0$$

となり，$(**)$ より $x_0=0$ である．

(ii) $x_0=-x_0+f(0)$ のとき

$$x_0=\frac{1}{2}f(0)$$

(ii) において $x_0=0$ とすると，$f(0)=0$ であり，$x_0=\dfrac{1}{2}f(0)$ は $x_0=0$ のときも含む．

よって　$\boldsymbol{x_0=\dfrac{1}{2}f(0)}$　……(答)

(3) 「$f(x)$ が 2 点以上の点を固定する」ということは

「少なくとも 2 つの実数 x_1，x_2 ($x_1 \fallingdotseq x_2$) に対して $f(x_1)=x_1$ かつ $f(x_2)=x_2$ となる」 …… $(***)$

ということである．

「任意の実数 x に対して $f(x)=x$ となる」ことを背理法により示す．

「$f(X) \fallingdotseq X$ となる X が存在する」と仮定する．条件 (a) において，$x=x_1$，$y=X$ とすると

$$|f(x_1)-f(X)|=|x_1-X|$$
$$f(x_1)-f(X)=\pm(x_1-X)$$

$f(x_1)=x_1$ より

$$x_1-f(X)=\pm(x_1-X)$$

(i) $x_1-f(X)=x_1-X$ のとき

$$f(X)=X$$

これは $f(X) \fallingdotseq X$ に反する．

(ii) $x_1-f(X)=-(x_1-X)$ のとき

$$f(X) = -X + 2x_1 \qquad \cdots\cdots ①$$

同じく，$x = x_2$ $y = X$ とすると

$$f(X) = -X + 2x_2 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．①，② より

$$-X + 2x_1 = -X + 2x_2$$
$$\therefore \quad x_1 = x_2$$

これは $(***)$ の $x_1 \fallingdotseq x_2$ に反する．

よって，仮定は誤りで，任意の実数 x に対して $f(x) = x$ となる．　　……(証明終わり)