$a^4 = b^2 + 2^c$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ で a が奇数であるものを求めよ．

(18 一橋大 後 経済 1)

【答】 $(a,\ b,\ c) = (3,\ 7,\ 5)$

【解答】

$a^4 = b^2 + 2^c$ より

$$(a^2+b)(a^2-b) = 2^c$$

$a,\ b,\ c$ は正の整数だから，$a^2+b > a^2-b$ であり，整数 $k,\ l$ を用いて

$$\begin{cases} a^2+b = 2^k \\ a^2-b = 2^l \end{cases} \qquad (k+l=c,\ k>l \geqq 0)$$

と表すことができる．$a^2,\ b$ について解くと

$$\begin{cases} a^2 = 2^{k-1}+2^{l-1} \\ b = 2^{k-1}-2^{l-1} \end{cases}$$

a は奇数だから，$l-1=0$ であり

$$\begin{cases} a^2 = 2^{k-1}+1 \\ b = 2^{k-1}-1 \end{cases}$$

第 1 式より

$$(a+1)(a-1) = 2^{k-1}$$

整数 $m,\ n$ を用いて

$$\begin{cases} a+1 = 2^m \\ a-1 = 2^n \end{cases} \qquad (m+n=k-1,\ m>n \geqq 0)$$

と表すことができる．a を消去すると

$$2 = 2^m - 2^n$$
$$2^{m-1} = 2^{n-1}+1$$

右辺は 1 より大きいから，左辺は 2 以上の偶数である．このことに注意すると

$$n-1=0 \text{ かつ } m-1=1$$
$$\therefore\quad m=2 \text{ かつ } n=1 \quad (m>n \geqq 0 \text{ を満たす})$$

このとき $k=m+n+1=4$ であり

$$a = 2^1+1 = 3,$$
$$b = 2^3-1 = 7$$

$2^c = 3^4-7^2 = 32 = 2^5$ より

$$c = 5$$

よって，求める正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は

$$(a,\ b,\ c) = (\mathbf{3,\ 7,\ 5})$$ ……(答)