次の問に答えよ．

(1) 1，4，9，16 のように，自然数の 2 乗で表せる数を平方数という．n を平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ は無理数であることを示せ．

(2) a，b を正の有理数，n を自然数とするとき，$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ は無理数であることを示せ．

(18 佐賀大 医 1)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) 背理法を用いる．$\sqrt{n}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{n}=\frac{q}{p} \quad (p,\ q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおけて，この両辺を 2 乗すると

$$n=\frac{q^2}{p^2}$$

$$np^2=q^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

p は q の約数であり，p と q は互いに素であるから $p=1$ である．このとき ① は

$$n=q^2$$

これは n が平方数でないことに反する．

よって，$\sqrt{n}$ が無理数である． ……(証明終わり)

(2) 背理法を用いる．$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定すると

$$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}=\frac{s}{r} \quad (r,\ s \text{ は互いに素な自然数})$$

とおけて，この両辺を 2 乗すると

$$a^2n+2ab\sqrt{n(n+1)}+b^2(n+1)=\frac{s^2}{r^2}$$

$$\sqrt{n(n+1)}=\frac{1}{2ab}\left\{\frac{s^2}{r^2}-(a^2+b^2)n-b^2\right\} \qquad \cdots\cdots ②$$

a，b は正の有理数，n，r，s は自然数より，②の右辺は有理数であるから，左辺の $\sqrt{n(n+1)}$ も有理数である．(1) の対偶により $n(n+1)$ は平方数である．

$n(n+1)$ については，不等式

$$n^2<n(n+1)<(n+1)^2$$

がつねに成り立つが，隣り合う平方数の間に平方数は存在しないから，これは不合理である．

よって，$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ は無理数である． ……(証明終わり)