p を素数，a, b を整数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れることを示せ．
(2) $(a+2)^p-a^p$ は偶数であることを示せ．
(3) $(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ．

(18 名古屋大 理系 3)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) $\begin{cases} 0 & (p=2 \text{ のとき}) \\ 2 & (p \text{ が 3 以上の素数のとき}) \end{cases}$

【解答】

(1) 二項定理を用いて

$$\begin{aligned}
&(a+b)^p-a^p-b^p \\
=&(a^p+{}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}b+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}ab^{p-1}+b^p)-a^p-b^p \\
=&{}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}b+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}ab^{p-1} \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

ここで $k=1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$ に対し

$${}_p\mathrm{C}_k=\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

は整数であり，p は素数であるから，${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数である．

よって，①より，$(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れる． ……(証明終わり)

(2) 二項定理より

$$\begin{aligned}
&(a+2)^p-a^p \\
=&(a^p+{}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}\cdot 2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}a\cdot 2^{p-1}+2^p)-a^p \\
=&{}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}\cdot 2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}a\cdot 2^{p-1}+2^p
\end{aligned}$$

各項は偶数であるから，$(a+2)^p-a^p$ は偶数である． ……(証明終わり)

(3) (1) において $b=2$ とすると，$(a+2)^p-a^p-2^p$ は p で割り切れる．
また，(2) を考えると $(a+2)^p-a^p-2^p$ は 2 の倍数である．

(i) $p=2$ のとき

$$(a+2)^2-a^2=4a+4=4(a+1)$$

より，$(a+2)^p-a^p$ を $2p=4$ で割ったときの余りは 0 である．

(ii) $p \geqq 3$ のとき
p と 2 は互いに素であるから，$(a+2)^p-a^p-2^p$ は $2p$ の倍数であり

$$(a+2)^p-a^p-2^p=2pq \ (q \text{ は整数})$$

とおくことができる．このとき

$$(a+2)^p-a^p=2pq+2^p \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，$(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割った余りは，2^p を $2p$ で割った余りに等しい．

(1) で $a=b=1$ とすると $(1+1)^p-1^p-1^p=2^p-2$ は p の倍数である．また，2^p-2 は 2 の倍数であるから，2^p-2 は $2p$ の倍数であり

$$2^p-2=2pr\ (r\ \text{は整数})$$

とおくことができる．すなわち

$$2^p=2pr+2$$

であり，2^p を $2p$ で割った余りは 2 である．

(i)，(ii) より，$(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割ったときの余りは

$$\begin{cases}\boldsymbol{0} & \textbf{(}\boldsymbol{p=2}\ \textbf{のとき)}\\ \boldsymbol{2} & \textbf{(}\boldsymbol{p}\ \textbf{が 3 以上の素数のとき)}\end{cases}$$

……(答)