1次不定方程式 $4x+7y=1$ の整数解の中で x の絶対値 $|x|$ が最小のものは $x=$ ア，$y=$ イ である．

また，整数 $p,\ q$ に対し，$s=\dfrac{p}{12}+\dfrac{q}{21}$ とおくとき，s のとりうる正の値のうち最小のものは $s=$ ウ である．

(18 大阪工大・情科・知財 5(1))

【答】

ア	イ	ウ
2	-1	$\dfrac{1}{84}$

【解答】

$$4x+7y=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$4\cdot 2+7\cdot(-1)=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$4(x-2)+7(y+1)=0$$

$$\therefore\quad 4(2-x)=7(y+1)$$

4 と 7 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases} 2-x=7k \\ y+1=4k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2-7k \\ y=4k-1 \end{cases}$$

と表すことができる．

$\dfrac{2}{7}$ に最も近い整数は 0 であるから，$|x|=|2-7k|$ は，$k=0$ で最小となる．このとき

$$x=\boxed{2},\ y=\boxed{-1} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots \text{(ア，イの答)}$$

である．

また，$s=\dfrac{p}{12}+\dfrac{q}{21}$ より

$$84s=4q+7p$$

s が正で最小となるとき，$4q+7p$ もまた正で最小となり，かつ $p,\ q$ が整数より，$4q+7p$ は正の整数である．

③ より $(p,\ q)=(-1,\ 2)$ のとき $4q+7p=1$ であり，これは正の最小な整数である．

よって，求める s の値は

$$84s=1 \qquad \therefore\quad s=\boxed{\frac{1}{84}} \qquad \cdots\cdots \text{(ウの答)}$$

である．

- 前半の $(x,\ y)$ より，$(p,\ q)=(4k-1,\ 2-7k)$ (k は整数) であれば，$4q+7p=1$ となり，求める s の値 $s=\dfrac{1}{84}$ を得ることができる．