集合 S を，m^2+n^2 (m, n は整数) の形で表される整数全体の集合，すなわち，

$$S=\{m^2+n^2\,|\,m,\ n \text{ は整数}\}$$

とする．たとえば，$2018=13^2+43^2$ なので，2018 は集合 S に属する．次の問いに答えよ．

(1) a を自然数とする．a が S に属するならば，a を 4 で割ったときの余りは，0, 1, 2 のいずれかであることを示せ．

(2) a, b を自然数とする．a, b がともに S に属するならば，ab もまた S に属することを示せ．

(3) 2018 より大きく，S に属する最小の自然数を求めよ．

(18 大阪市大 後 理 (数)・工 5)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 2020

【解答】

(1) まず，自然数 m に対して，m^2 を 4 で割った余りは

$m^2 \pmod 4$

m	0	1	2	3
m^2	0	1	0	1

より，0，1 のいずれかであり，m^2+n^2 を 4 で割った余りは

$m^2+n^2 \pmod 4$

m^2 \ n^2	0	1
0	0	1
1	1	2

より，0，1，2 のいずれかであである．

したがって，$a\in S$ ならば，a を 4 で割った余りは 0，1，2 のいずれかである．

……(証明終わり)

(2) a, $b\in S$ ならば

$$a=k^2+l^2,\quad b=m^2+n^2$$

となる自然数 k, l, m, n が存在する．このとき

$$\begin{aligned}ab&=(k^2+l^2)(m^2+n^2)\\&=k^2m^2+l^2m^2+k^2n^2+l^2n^2\\&=(k^2m^2+l^2n^2)+(l^2m^2+k^2n^2)\\&=(k^2m^2+2klmn+l^2n^2)+(l^2m^2-2klmn+k^2n^2)\\&=(km+ln)^2+(lm-kn)^2\end{aligned}$$

したがって，$ab\in S$ である．……(証明終わり)

(3) 2019 から順に平方和となるかどうかを調べていく．

$2019 = 4 \times 504 + 3$ より，$2019 \equiv 3 \pmod 4$ である．

(1) より，$2019 \notin S$ である．

次に，2020 を調べる．

$$2020 = 20 \times 101 = (4^2 + 2^2) \times (10^2 + 1^2)$$

$4^2 + 2^2,\ 10^2 + 1^2 \in S$ であるから，(2) より

$$2020 = (4^2 + 2^2) \times (10^2 + 1^2) \in S$$

よって，2018 より大きく，S に属する最小の自然数は **2020** である．　　　　……（答）

- (2) の途中式より

$$\begin{aligned} 2020 &= (4^2 + 2^2) \times (10^2 + 1^2) \\ &= (4 \cdot 10 + 2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 10 - 4 \cdot 1)^2 \\ &= 42^2 + 16^2 \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} 2020 &= (2^2 + 4^2) \times (10^2 + 1^2) \\ &= (2 \cdot 10 + 4 \cdot 1)^2 + (4 \cdot 10 - 2 \cdot 1)^2 \\ &= 24^2 + 38^2 \end{aligned}$$

である．