

自然数  $n$  に対して

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

とおく. また,

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

- (1)  $1000!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ.
- (2)  $1000!!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ.
- (3)  $999!!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ.

(17 大阪市大 文系 1)

【答】

- (1) 498
- (2) 247
- (3) 251

【解答】

実数  $x$  に対し,  $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  で表すことにする.

- (1)  $k$  を正の整数とする. 1 から 1000 までの整数のうち,  $3^k$  の倍数であるが  $3^{k+1}$  の倍数でないものの個数は

$$\left[ \frac{1000}{3^k} \right] - \left[ \frac{1000}{3^{k+1}} \right] \quad (\text{個})$$

である. ここで,  $3^6 = 729$ ,  $3^7 = 2187$  より

$$\left[ \frac{1000}{3^k} \right] = 0 \quad (k \geq 7)$$

であることに注意すると, 求める個数は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^6 k \left( \left[ \frac{1000}{3^k} \right] - \left[ \frac{1000}{3^{k+1}} \right] \right) \\ &= 1 \left( \left[ \frac{1000}{3} \right] - \left[ \frac{1000}{3^2} \right] \right) + 2 \left( \left[ \frac{1000}{3^2} \right] - \left[ \frac{1000}{3^3} \right] \right) + \\ & \quad \cdots + 6 \left( \left[ \frac{1000}{3^6} \right] - \left[ \frac{1000}{3^7} \right] \right) \\ &= \left[ \frac{1000}{3} \right] + \left[ \frac{1000}{3^2} \right] + \cdots + \left[ \frac{1000}{3^6} \right] \\ &= 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 \\ &= 498 \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

……(答)

(2)  $n!!$  の定義より

$$\begin{aligned} 1000!! &= 1000 \cdot 998 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 2^{500} \times 500 \cdot 499 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2^{500} \times 500! \end{aligned}$$

より、求める個数は、 $500!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数に等しい。

(1) と同様にして

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{500}{3} \right] + \left[ \frac{500}{3^2} \right] + \dots + \left[ \frac{500}{3^5} \right] \\ &= 166 + 55 + 18 + 6 + 2 \\ &= \mathbf{247} \quad (\text{個}) \qquad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3)  $999!!$  は

$$999!! = 999 \cdot 997 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = \frac{1000!}{1000!!}$$

より、求める個数は、 $1000!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数から、 $1000!!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を除いたものに等しい。

(1), (2) より

$$498 - 247 = \mathbf{251} \quad (\text{個}) \qquad \dots\dots(\text{答})$$