以下の問に答えよ．

(1) x の整式 $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ を因数分解せよ．

(2) どのような正整数 n に対しても，$n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ は平方数ではないことを証明せよ．ただし，平方数とはある正整数 m を用いて m^2 と表される正整数のことである．

(18 奈良県医大 医 6)

【答】

(1) $(x+1)^2(x^2+1)$

(2) 略

【解答】

(1) 組立除法で割り算を実行すると右のようになる．

-1	1	2	2	2	1
		-1	-1	-1	-1
-1	1	1	1	1	0
		-1	0	-1	
	1	0	1	0	

$$\begin{aligned}&x^4+2x^3+2x^2+2x+1\\=&\boldsymbol{(x+1)^2(x^2+1)}\end{aligned}$$ ……(答)

- 次のように変形してもよい．

$$\begin{aligned}&x^4+2x^3+2x^2+2x+1\\=&x^2(x^2+2x+1)+x^2+2x+1\\=&(x+1)^2(x^2+1)\end{aligned}$$

(2) 背理法を用いる．

$n^4+2n^3+2n^2+2n+1=(n+1)^2(n^2+1)$ が平方数であると仮定する．このとき，n^2+1 が平方数であり

$$n^2+1=m^2 \quad (m \text{ は正整数})$$

と表すことができる．

$$(m+n)(m-n)=1$$

である．左辺において，$m+n \geqq 2$, $m-n$ は整数である．これは右辺が 1 であることに反する．

よって，どのような正整数 n に対しても，$n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ は平方数ではない．

…… (証明終わり)