n を 1 より大きい整数とする．このとき，以下の条件を満たす 0 以上の整数 r がただ一つ定まる：

条件：n は 2^r で割り切れるが，2^{r+1} では割り切れない．

(1) 1 以上 n 以下の任意の整数 i に対して，2 項係数 ${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ は 2^{r+1} で割り切れることを証明せよ．

(2) n 個の 2 項係数 ${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の最大公約数は 2^{r+1} であることを証明せよ．

(18 奈良県医大 後 医 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

1 より大きい整数 n に対し，2^r で割り切れるが 2^{r+1} では割り切れないような 0 以上の整数 r がただ一つ定まる．言い換えると，r $(r \geqq 0)$ は n に含まれる素因数 2 の個数である．

(1) $1 \leqq i \leqq n$ のとき

$$\begin{aligned}{}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1} &= \frac{(2n)!}{(2i-1)!\{2n-(2i-1)\}!}\\ &= \frac{2n}{2i-1}\cdot\frac{(2n-1)!}{(2i-2)!\{2n-1-(2i-2)\}!}\\ &= \frac{2n}{2i-1}\cdot {}_{2n-1}\mathrm{C}_{2i-2}\end{aligned}$$

${}_{2n-1}\mathrm{C}_{2i-2}$ は整数である．また，条件から，$2n$ は 2^{r+1} を因数にもつ．2 と $2i-1$ は互いに素であるから，${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ は 2^{r+1} を因数にもつ．

したがって，2 項係数 ${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ は 2^{r+1} で割り切れる．　　　　……(証明終わり)

(2) (1) より，${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のすべては 2^{r+1} で割り切れる．このとき ${}_{2n}\mathrm{C}_1 = 2n$ は 2^{r+2} で割り切れないから，${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の公約数に含まれる素因数 2 の個数は 2^{r+1} である．

次に，${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の公約数に 2 以外の素因数が含まれないことを背理法で示す．

奇素数 p が ${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の公約数であるとする．二項定理により

$$(1+1)^{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$
$$(1-1)^{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_0 - {}_{2n}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

辺々引くと

$$2({}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}) = 2^{2n}$$
$${}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} = 2^{2n-1}$$

となる．左辺の各項は p を因数ともつから左辺は奇素数 p で割り切れるが，右辺の素因数は 2 のみで奇素数 p を因数にもたない．これは不合理である．

したがって，奇素数 p が ${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の公約数となることはない．

以上より，${}_{2n}\mathrm{C}_{2i-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の最大公約数は 2^{r+1} である．　　……(証明終わり)