次の各問に答えよ．

(1) 十進法で表された整数 147 を，五進法と八進法で表せ．

(2) 五進法により 2 桁で表された正の整数で，八進法で表すと 2 桁となるものを考える．このとき，八進法で表したときの各位の数の並びは五進法で表されたときの各位の数の並びと逆順にはならないことを示せ．

(3) 五進法により 3 桁で表された正の整数で，八進法で表すと 3 桁となるものを考える．このとき，八進法で表したときの各位の数の並びが五進法で表されたときの各位の数の並びと逆順になるものをすべて求め，十進法で表せ．

(18 宮崎大 教・農 9)

【答】

(1) $1042_{(5)}$，$223_{(8)}$
(2) 略
(3) 91

【解答】

(1) 5 および 8 による割り算をそれぞれ実行すると

$$
\begin{array}{r|rcl}
5 & 147 & & \\ \hline
5 & 29 & \cdots & 2 \\ \hline
5 & 5 & \cdots & 4 \\ \hline
 & 1 & \cdots & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rcl}
8 & 147 & & \\ \hline
8 & 18 & \cdots & 3 \\ \hline
 & 2 & \cdots & 2
\end{array}
$$

よって，五進法と八進法による表記はそれぞれ

$\mathbf{1042_{(5)}}$，$\mathbf{223_{(8)}}$ ……(答)

である．

(2) 背理法を用いる．五進法で表された 2 桁の整数 $ab_{(5)}$ を八進法で表すと，2 桁の整数 $ba_{(8)}$ となる，すなわち

$$ab_{(5)} = ba_{(8)} \quad (1 \leqq a \leqq 4,\ \ 1 \leqq b \leqq 4)$$

を満たす整数 a，b が存在すると仮定する．

十進法で表すと

$$5a + b = 8b + a$$
$$4a = 7b$$

4 と 7 は互いに素なので，a は 7 の倍数であるが，$1 \leqq a \leqq 4$ より，これは不合理である．

よって，五進法により 2 桁で表された正の整数を八進法で表すとき，八進法で表した各位の数の並びは五進法で表されたときの各位の数の並びと逆順にはならない．

…… (証明終わり)

(3) 五進法で表された 3 桁の整数を $abc_{(5)}$ を八進法で表すと，3 桁の整数は $cba_{(8)}$ となる，すなわち

$$abc_{(5)} = cba_{(8)} \quad \left(1 \leqq a \leqq 4,\ \ 0 \leqq b \leqq 4,\ \ 1 \leqq c \leqq 4 \cdots\cdots ①\right)$$

を満たす整数 a, b, c を求める．
　十進法で表すと

$$
\begin{aligned}
&25a+5b+c=64c+8b+a\\
&24a=3b+63c\\
&8a=b+21c \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

① に注意すると

$$8a \geqq 0+21\cdot 1=21$$

である．したがって，$a=3$ または $a=4$ である．

(i) $a=3$ のとき

$$② \iff b+21c=24$$

　これを満たす c は，$c=1$ のみである．このとき $b=3$ となる．

(ii) $a=4$ のとき

$$② \iff b+21c=32$$

　これを満たす c は，$c=1$ のみである．このとき $b=11$ となり不適．

(i)，(ii) より，求める数は $331_{(5)}$ であり，これを十進法で表すと

$$25\times 3+5\times 3+1=\mathbf{91} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．