$a=308,\ b=255$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) a と b が互いに素であることを示せ．
(2) 方程式 $ax+by=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．
(3) 方程式 $ax+by=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を 1 つ求めよ．
(4) 方程式 $ax+by=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(18 富山県大 工 3)

【答】

(1) 略
(2) $(255k,\ -308k)$ 　(k は整数)
(3) $(77,\ -93)$ など
(4) $(77+255m,\ -93-308m)$ 　(m は整数)

【解答】

(1) $a=308$ と $b=255$ に互除法の計算を行うと

$$\begin{aligned}308&=255\times1+53\\255&=53\times4+43\\53&=43\times1+10\\43&=10\times4+3\\10&=3\times3+1\\3&=\boxed{1}\times3+0\end{aligned}$$

これより，a と b の最大公約数は 1，すなわち a と b は互いに素である．　……(証明終わり)

- 素因数分解すると

$$\begin{aligned}a&=308=2^2\cdot7\cdot11,\\b&=255=3\cdot5\cdot17\end{aligned}$$

であるから，a と b の最大公約数は 1，すなわち a と b は互いに素である．

(2) $ax+by=0$ より

$$ax=-by$$

a と b は互いに素であるから，x は b の倍数であり

$$x=bk\quad(k\text{ は整数})$$

と表すことができる．このとき

$$a\cdot bk=-by\qquad\therefore\quad y=-ak$$

これに $a=308,\ b=255$ を代入すると，求める解は

$$(x,\ y)=\boldsymbol{(255k,\ -308k)}\quad\boldsymbol{(k\text{ は整数})}$$ ……(答)

である．

(3) (1) の互除法の計算から

$$\begin{aligned}1 &= 10 - \boxed{3} \times 3 = 10 - (43 - 10 \times 4) \times 3\\ &= 43 \times (-3) + \boxed{10} \times 13 = 43 \times (-3) + (53 - 43 \times 1) \times 13\\ &= 53 \times 13 + \boxed{43} \times (-16) = 53 \times 13 + (255 - 53 \times 4) \times (-16)\\ &= 255 \times (-16) + \boxed{53} \times 77 = 255 \times (-16) + (308 - 255 \times 1) \times 77\\ &= 308 \times 77 + 255 \times (-93)\end{aligned}$$

すなわち

$$308 \times 77 + 255 \times (-93) = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

① より，$ax + by = 1$ の解の 1 つは

$$(x,\ y) = \mathbf{(77,\ -93)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $ax + by = 1$ と ① の辺々を引くと

$$a(x - 77) + b(y + 93) = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$
$$\therefore\quad a(x - 77) = -b(y + 93)$$

a と b は互いに素であるから，$x - 77$ は b の倍数であり

$$x - 77 = bm \quad (m \text{ は整数})$$

と表すことができる．このとき

$$a \cdot bm = -b(y + 93) \qquad \therefore\quad y + 93 = -am$$

これに $a = 308$，$b = 255$ を代入すれば，$ax + by = 1$ の解は

$$(x,\ y) = \mathbf{(77 + 255m,\ -93 - 308m)} \quad \mathbf{(}\boldsymbol{m}\ \textbf{は整数)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ② 以降は (2) を利用すれば，同じ議論を繰り返さないで済む．
  (2) より ② のすべての解は

$$(x - 77,\ y + 93) = (255k,\ -308k)$$
$$\therefore\quad (x,\ y) = (77 + 255k,\ -93 - 308k) \quad (k \text{ は整数})$$