実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．次の問いに答えよ．

(1) $[x+1]=[2x]$

(2) $x^2+2[x]+1=0$ をみたす x を $-3 \leqq x \leqq 0$ の範囲で求めよ．

(18 岐阜聖徳学園大)

【答】

(1) $\dfrac{1}{2} \leqq x < \dfrac{3}{2}$

(2) $x=-1,\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{5}$

【解答】

(1) $\qquad [x+1]=[2x] \qquad \cdots\cdots ①$

$[x]=n$ (n は整数) とすると，$n \leqq x < n+1$ であり

$$[x+1]=n+1,$$

$$[2x]=\begin{cases} 2n & \left(2n \leqq 2x < 2n+1,\ \text{すなわち } n \leqq x < n+\dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right) \\ 2n+1 & \left(2n+1 \leqq 2x < 2n+2,\ \text{すなわち } n+\dfrac{1}{2} \leqq x < n+1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

である．

(i) $n \leqq x < n+\dfrac{1}{2}$ のとき

$$① \iff n+1=2n$$

$$\therefore \quad n=1 \qquad \therefore \quad 1 \leqq x < \frac{3}{2}$$

(ii) $n+\dfrac{1}{2} \leqq x < n+1$ のとき

$$① \iff n+1=2n+1$$

$$\therefore \quad n=0 \qquad \therefore \quad \frac{1}{2} \leqq x < 1$$

(i) または (ii) より，①をみたす x は

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- $[x+1]=[2x]=m$ (m は整数) とおくと

$$m \leqq x+1 < m+1 \quad \text{かつ} \quad m \leqq 2x < m+1$$

$$\therefore \quad m-1 \leqq x < m \quad \text{かつ} \quad \frac{m}{2} \leqq x < \frac{m+1}{2} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

これをみたす x が存在する条件は

$$\begin{cases} m-1 < \dfrac{m+1}{2} \\ \dfrac{m}{2} < m \end{cases} \qquad \therefore \quad 0 < m < 3$$

m は整数なので

$$m=1 \text{ または } 2$$

$m=1$ のとき

$$\text{㋐} \iff 0 \leqq x < 1 \text{ かつ } \frac{1}{2} \leqq x < 1 \qquad \therefore \quad \frac{1}{2} \leqq x < 1$$

$m=2$ のとき

$$\text{㋐} \iff 1 \leqq x < 2 \text{ かつ } 1 \leqq x < \frac{3}{2} \qquad \therefore \quad 1 \leqq x < \frac{3}{2}$$

以上より，求める x の範囲は $\quad \dfrac{1}{2} \leqq x < \dfrac{3}{2}$

(2) $\qquad x^2 + 2[x] + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$

$x = n + \alpha$ (n は整数, $0 \leqq \alpha < 1$) とすると，$[x] = n$ であり

$$② \iff x^2 + 2n + 1 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 = -2n - 1 \qquad \cdots\cdots ②'$$

②′ より，$-2n-1 \geqq 0$ であり，$n \leqq -\dfrac{1}{2}$ である．x は $-3 \leqq x \leqq 0$ の範囲の実数であるから

$$-3 \leqq n + \alpha \leqq 0$$

n は $-3 - \alpha \leqq n \leqq -\alpha$ の範囲の整数であり

$$n = -3,\ -2,\ -1$$

のいずれかである．②′ に各値を代入すると

$$x^2 = 5,\ 3,\ 1$$

$-3 \leqq x \leqq 0$ であるから

$$\boldsymbol{x = -\sqrt{5},\ -\sqrt{3},\ -1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- $-3 \leqq x \leqq 0$ の条件はなくてもよい．

  $[x] = n$ とすると，②′ より $n \leqq -\dfrac{1}{2}$ であり，n は整数であるから $n \leqq -1$ である．

  また，$n \leqq x < n+1$ における第 2 の不等式に着目すると

  $$x < n + 1 \leqq 0$$

  であるから

  $$x^2 > (n+1)^2$$

  $$-2n - 1 > (n+1)^2 \quad (\because\ ②')$$

  $$\therefore \quad n^2 + 4n + 2 < 0$$

  $$\therefore \quad -2 - \sqrt{2} < n < -2 + \sqrt{2}$$

  これをみたす整数 n は $-3,\ -2,\ -1$ のみである．