$\sqrt{n^2+8}$ が自然数 m になるような自然数 m と n の組み合わせを求めよ．
(18 昭和大 歯・薬・保 2(2))

【答】 $(m,\ n)=(3,\ 1)$

【解答】
条件より

$$\sqrt{n^2+8}=m \qquad \cdots\cdots (*)$$

となる自然数 $m,\ n$ が存在する．

$$\begin{aligned}(*) &\iff n^2+8=m^2\\ &\iff (m-n)(m+n)=8\end{aligned}$$

$m,\ n$ は自然数なので，$0<m-n<m+n$ である．また，$(m-n)+(m+n)=2m$ より，$m-n$ と $m+n$ の偶奇は一致する．したがって

$$(m-n,\ m+n)=(2,\ 4)$$

であり

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(3,\ 1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 「自然数 m と n」を「『自然数 m』と『n』」と解釈するか,「自然数『m と n』」と解釈するか躊躇した人はこう考えてみてはどうですか．
  平方数は無数に存在するから，n^2+8 が平方数となる実数 n は無数に存在する．前者の意味で解釈すると組 $(m,\ n)$ は無数に存在するとことになり，問題として成立しません．したがって，後者の意味で解釈し n も自然数とします．