数列 a_1, a_2, \cdots を

$$a_n = \frac{2n+1C_n}{n!}$$
 $(n = 1, 2, \cdots)$

で定める.

- (1) $n \ge 2$ とする. $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\frac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \ge 1$ と分子 q_n を求めよ.
- (2) a_n が整数となる $n \ge 1$ をすべて求めよ.

(18 東京大 理 2)

【答】

(1)
$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, q_n = 2n+1$$

$$(2)$$
 $n=1, 2$

【解答】

$$a_n = \frac{2n+1C_n}{n!} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-n)!n!} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!(n!)^2} \cdots \cdots$$
 ①

(1) ①より

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!(n!)^2} \cdot \frac{n!\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!}$$
$$= \frac{(2n+1) \cdot 2n}{(n+1) \cdot n^2}$$
$$= \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$

ここで、2n+1とnの最大公約数を g_1 とすると

$$\begin{cases} 2n+1=g_1a_1\\ n=g_1b_1 \end{cases} (a_1, b_1 は互いに素な整数)$$

と表すことができる. 2 式より n を消去すると

$$2 \cdot g_1 b_1 + 1 = g_1 a_1$$

 $g_1(a_1 - 2b_1) = 1$
 $g_1 = 1$

また、2n+1とn+1の最大公約数を g_2 とすると

$$\begin{cases} 2n+1=g_2a_2\\ n+1=g_2b_2 \end{cases} (a_2, b_2 は互いに素な整数)$$

と表すことができる. 2 式より n を消去すると

$$2(g_2b_2 - 1) + 1 = g_2a_2$$

$$g_2(2b_2 - a_2) = 1$$

∴ $g_2 = 1$

2n+1 は n, n+1 のどちらとも互いに素であるから, 2n+1 と n(n+1) は互いに素である. また, n(n+1) は連続する 2 整数の積であるから偶数である.

したがって,
$$\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$
 の分母と分子の最大公約数は 2 であり,既約分数で表すと $\frac{2n+1}{n(n+1)}$

である. よって

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad q_n = 2n+1$$
(答)

である.

• 2n+1 と n(n+1) が互いに素であることは互除法で示すこともできる.

$$2n+1 = n \cdot 2 + 1$$

2n+1とnの最大公約数は1である.

$$2n + 1 = (n+1) \cdot 1 + n$$

 $n + 1 = n \cdot 1 + 1$

2n+1とn+1の最大公約数は1である.

2n+1 は n, n+1 のどちらとも互いに素であるから, 2n+1 と n(n+1) は互いに素である.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の増減を調べる. $a_n > 0$ より

$$a_{n-1} < a_n \iff \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \quad (n \ge 2)$$

(1) より

$$\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)}{2}} > 1$$

$$n^2 - 3n - 2 < 0$$

$$n(n-3) < 2$$

n は $n \ge 2$ を満たす整数であるから

$$n = 2, 3$$

したがって

$$a_1 < a_2 < a_3, \quad a_3 > a_4 > a_5 > \cdots$$

$$\texttt{ZZC}, \quad a_1 = \frac{3!}{2!(1!)^2} = 3 \; \succeq \; a_n = \frac{2n+1}{\underline{n(n+1)}} a_{n-1} \; \; \texttt{\textsterling} \; \texttt{0}$$

$$a_2 = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5,$$

$$a_{2} = \frac{7}{3} \cdot 3 = 3,$$

$$a_{3} = \frac{7}{6} \cdot 5 = \frac{35}{6},$$

$$a_{4} = \frac{9}{10} \cdot \frac{35}{6} = \frac{21}{4},$$

$$a_{5} = \frac{11}{15} \cdot \frac{21}{4} = \frac{77}{20},$$

$$a_{6} = \frac{13}{21} \cdot \frac{77}{20} = \frac{143}{60},$$

$$a_{7} = \frac{15}{28} \cdot \frac{143}{60} = \frac{143}{112},$$

$$a_{8} = \frac{17}{36} \cdot \frac{143}{112} = \frac{2431}{4032} < 1$$

したがって

$$a_1 < a_2 < a_3$$
, $a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > 1 > a_8 > \cdots$

であり、 a_n が整数となる n は

$$n=1, 2$$
 ······(答)

である.

• $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ である. 3 以上の n に対して, a_n は整数にならないことを示す.

$$a_{n} = \frac{q_{n}}{p_{n}} a_{n-1}$$

$$= \frac{q_{n}}{p_{n}} \cdot \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} a_{n-2}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{q_{n}q_{n-1} \cdots q_{3}}{p_{n}p_{n-1} \cdots p_{3}} a_{2}$$

$$= \frac{5q_{n}q_{n-1} \cdots q_{3}}{p_{n}p_{n-1} \cdots p_{3}}$$

分子の $5q_nq_{n-1}\cdots q_3$ は奇数であり, $p_3=6$ であるから, $a_n=\frac{奇数}{偶数}$ であり,3 以上の n に対して, a_n は整数ではない.以上より,求める n は n=1,2 である.