

次の問いに答えよ.

- (1) x, y, z を実数とする. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz > 0$ のとき, $x + y + z > 0$ が成り立つことを示せ.
- (2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 25$ および $x \leq y \leq z$ をみたす整数の組 (x, y, z) をすべて求めよ.

(18 横浜国大 後 理工・都市科 3)

【答】

- (1) 略
 (2) $(x, y, z) = (-3, 2, 2), (8, 8, 9)$

【解答】

- (1) 左辺を変形すると

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

x, y, z は実数より, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ である.

よって, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz > 0$ ならば, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 > 0$ であり

$$x + y + z > 0$$

が成り立つ.

……(証明終わり)

- 対偶をとって「 $x + y + z \leq 0$ ならば, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \leq 0$ である」ことを示してもよい.

- (2) $x \leq y \leq z$ であるから, $y - x = a, z - y = b$ とおくと

$$a \geq 0, b \geq 0, z - x = a + b$$

であり

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{a^2 + b^2 + (a + b)^2\} \\ &= a^2 + b^2 + ab \end{aligned}$$

であるから, ①より

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 25$$

は

$$(x + y + z)(a^2 + b^2 + ab) = 25$$

と変形される. $x + y + z$ は整数, $a^2 + b^2 + ab$ は 0 以上の整数であるから

$$(x + y + z, a^2 + b^2 + ab) = (1, 25), (5, 5), (25, 1)$$

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ a^2 + b^2 + ab = 25 \end{cases} \text{ のとき}$$

$a \geq 0, b \geq 0$ であるから, $a = 0, 1, 2, \dots$ を代入すると, 第 2 式をみたす組 (a, b) は

$$(a, b) = (0, 5), (5, 0)$$

(ア) $(a, b) = (0, 5)$ のとき

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - x = 0 \\ z - y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = y + 5 \\ y + y + (y + 5) = 1 \end{cases}$$

$3y = -4$ より y は整数とならないから, 不適.

(イ) $(a, b) = (5, 0)$ のとき

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - x = 5 \\ z - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 5 \\ z = y \\ (y - 5) + y + y = 1 \end{cases}$$

$3y = 6$ より $y = 2$ であり

$$(x, y, z) = (-3, 2, 2)$$

$$(ii) \begin{cases} x + y + z = 5 \\ a^2 + b^2 + ab = 5 \end{cases} \text{ のとき}$$

$a = 0, 1, 2, \dots$ を代入すると, 第 2 式をみたす 0 以上の整数 a, b は存在しない.

$$(iii) \begin{cases} x + y + z = 25 \\ a^2 + b^2 + ab = 1 \end{cases} \text{ のとき}$$

第 2 式をみたす組 (a, b) は

$$(a, b) = (0, 1), (1, 0)$$

(ア) $(a, b) = (0, 1)$ のとき

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ y - x = 0 \\ z - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = y + 1 \\ y + y + (y + 1) = 25 \end{cases}$$

$3y = 24$ より $y = 8$ であり

$$(x, y, z) = (8, 8, 9)$$

(イ) $(a, b) = (1, 0)$ のとき

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ y - x = 1 \\ z - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 1 \\ z = y \\ (y - 1) + y + y = 25 \end{cases}$$

$3y = 26$ より y は整数とならないから, 不適.

(i), (ii), (iii) より

$$(x, y, z) = (-3, 2, 2), (8, 8, 9)$$

……(答)