

完全数とは、 $6 = 1 + 2 + 3$ のようにその数自身を除く正の約数の総和として表される自然数のことである。6の次に大きい完全数は ウ である。

(18 産業医大 医 1(3))

【答】	ウ
	28

【解答】

(i) p が素数のとき、 p の約数は $1, p$ である。 p が完全数であると仮定すると

$$1 = p$$

p は素数であるから、これは不合理。 p は完全数ではない。

(ii) p が素数のとき、 p^m (m は 2 以上の整数) の約数は $1, p, p^2, \dots, p^{m-1}, p^m$ である。 p^m が完全数であると仮定すると

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{m-1} = p^m$$

$$p(p^{m-1} - p^{m-2} - \dots - p - 1) = 1$$

p は 1 の約数となり、不合理。 p^m は完全数ではない。

(iii) p, q ($p < q$) が素数のとき、 pq の約数は $1, p, q, pq$ である。 pq が完全数であると仮定すると

$$1 + p + q = pq$$

$$(p-1)(q-1) = 2$$

これをみたま p, q は

$$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=2 \end{cases} \quad \therefore p=2, q=3$$

であるから、 pq が完全数となるのは 6 のみである。

(i)~(iii) の場合を除いた 6 より大きい整数は

						...	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	...			

であり、これらについて順に完全数かどうかを調べる。

12 の約数は $1, 2, 3, 4, 6, 12$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 \neq 12$$

18 の約数は $1, 2, 3, 6, 9, 18$

$$1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21 \neq 18$$

20 の約数は $1, 2, 4, 5, 10, 20$

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22 \neq 20$$

24 の約数は $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36 \neq 24$$

28 の約数は $1, 2, 4, 7, 14, 28$

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

以上より、6 の次に大きい完全数は **28** である。

.....(答)

- $a^n - 1$ が素数ならば、 $a = 2$ で n は素数である。 $2^p - 1$ の形をした素数はメルセンヌ素数と呼ばれている。

$2^p - 1$ がメルセンヌ素数のとき、 $2^{p-1}(2^p - 1)$ は完全数であり (ユークリッド)、偶数の完全数は、メルセンヌ素数を用いて $2^{p-1}(2^p - 1)$ として表すことができる (オイラー)。奇数の完全数は発見されていない。