縦と横の辺の長さが，それぞれ 18cm，24cm の長方形がある．

(ア) 長方形を，その辺に平行に切断し，余りが出ないように同じ大きさのいくつかの正方形に分けることを考える．正方形の大きさが最も大きくなるように切断するときの正方形の 1 辺の長さを求めなさい．

(イ) 長方形をすき間なく同じ向きに並べて，正方形を作ることを考える．正方形の大きさが最も小さくなるときの正方形の 1 辺の長さを求めなさい．

(18 筑波技術大 産技 (情報) 2(2))

【答】

(ア) 6cm

(イ) 72cm

【解答】

(ア) 正方形の 1 辺の長さを l とすると，余りが出ないように長方形を切断するから

$$\begin{cases} al = 18 \\ bl = 24 \end{cases} \quad (a,\ b \text{ は正の整数}) \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，正方形の大きさが最も大きくなるのは，l が最大のときである．

l を消去すると

$$18b = 24a \qquad \therefore \quad 3b = 4a$$

3 と 4 は互いに素より

$$a = 3k, \quad b = 4k \quad (k \text{ は正の整数})$$

このとき

$$kl = 6 \qquad \cdots\cdots ①'$$

であり，これを満たす最小な整数 k は $k = 1$ であるから，最大な l は $l = 6$ である．

よって，求める正方形の 1 辺の長さは

$$\boldsymbol{6\ cm} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(イ) 長方形をすき間なく同じ向きに並べて正方形を作るとき，正方形の 1 辺の長さを L とすると

$$\begin{cases} 18p = L \\ 24q = L \end{cases} \quad (p,\ q \text{ は正の整数}) \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，正方形の大きさが最も小さくなるのは，L が最小のときである．

L を消去すると

$$18p = 24q \qquad \therefore \quad 3p = 4q$$

3 と 4 は互いに素より

$$p = 4k, \quad q = 3k \quad (k \text{ は正の整数})$$

このとき

$$L = 72k$$

であり，これを満たす最小な整数 k は $k=1$ であるから，最小な L は $L=72$ である．
　よって，求める正方形の 1 辺の長さは

72 cm ……(答)

である．

- 18 と 24 を素因数分解すると

$$18=2\cdot 3^2$$
$$24=2^3\cdot 3$$

である．
　② を満たす L は整数であり，② を満たす最小な整数 L は 18 と 24 の最小公倍数である．したがって，求める正方形の 1 辺の長さは

$$2^3\cdot 3^2=72 \text{ cm}$$

　しかし，① だけでは l は整数とは限らない．これは ①′ においても同じである．①′ を満たす l の値は

$$l=\frac{6}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{6}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{6}{5},\ \cdots$$

といった具合である．これに l の最大性が加わると

$$l=\frac{6}{1}=1$$

となる．①′ において l が最大となるのは，k が最小，すなわち $k=1$ のときであり，このとき l は整数である．l が整数であることが確認されれば，最大な整数 l は 18 と 24 の最大公約数である．したがって，求める正方形の 1 辺の長さは

$$2\cdot 3=6 \text{ cm}$$