$a,\ b$ は正の整数で互いに素とする．このとき，どんな整数 n も適当な整数 $x,\ y$ を用いて $n=ax+by$ という形に表されることが知られている．集合 A を

$$A=\left\{n\ \middle|\ \begin{array}{l} n \text{ は整数であって，0 以上の適当な整数 } x,\ y \text{ を用いて} \\ n=ax+by \text{ という形に表される．} \end{array}\right\}$$

とおく．このとき，$(a-1)(b-1)-1$ は A の要素ではないが，$(a-1)(b-1)$ 以上のどんな整数も A の要素であることを証明したい．以下の設問に対する解答を解答用紙の所定の欄 (省略) に述べよ．

(1) $a=4,\ b=7$ の場合を考える．このとき，右にある 0 以上 27 以下の整数のうち，A の要素であるすべての数を ○ で囲め．

0	4	8	12	16	20	24
1	5	9	13	17	21	25
2	6	10	14	18	22	26
3	7	11	15	19	23	27

(2) n は整数とし，適当な整数 x_0 と y_0 を用いて，$n=ax_0+by_0$ と表す．このとき，y_0 を a で割った余りを y とすると，適当な整数 x を用いて $n=ax+by$ という形に表されることを示せ．

(3) $n=(a-1)(b-1)-1$ とする．このとき，n は A の要素ではないこと，すなわち 0 以上のどんな整数 $x,\ y$ を用いても，$n=ax+by$ という形に表すことができないことを背理法を用いて示せ．

(4) n は $(a-1)(b-1)$ 以上の整数とする．このとき，n は A の要素であること，すなわち整数 $x,\ y$ を $0 \leqq y < a$ を満たすように選んで $n=ax+by$ という形に表すと，$x \geqq 0$ であることを示せ．

(18 聖マリアンナ医大 4)

【答】

(1) 0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】

(1) $a=4,\ b=7$ のとき

$$A=\{n\,|\,n=4x+7y,\ x \text{ と } y \text{ は 0 以上の整数 }\}$$

$y=0$ のとき, $n=4x\ (x \geqq 0)$ であり　　$n=0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24$
$y=1$ のとき, $n=7+4x\ (x \geqq 0)$ であり　　$n=7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27$
$y=2$ のとき, $n=14+4x\ (x \geqq 0)$ であり　　$n=14,\ 18,\ 22,\ 26$
$y=3$ のとき, $n=21+4x\ (x \geqq 0)$ であり　　$n=21,\ 25$
$y \geqq 4$ のとき, $n=28+4x \geqq 28\ (x \geqq 0)$ は　　範囲外

0 以上 27 以下の整数のうち，A の要素であるすべての数を ○ で囲むと次のようになる．

⓪	④	⑧	⑫	⑯	⑳	㉔
1	5	9	13	17	㉑	㉕
2	6	10	⑭	⑱	㉒	㉖
3	⑦	⑪	⑮	⑲	㉓	㉗

……(答)

- 「$n \in A$ ならば $n+4 \in A$ である」といえる．

(2) y_0 を a で割ったときの商を q (q は整数) とすると，$y_0 = aq + y$ であるから

$$\begin{aligned} n &= ax_0 + by_0 \\ &= ax_0 + b(aq+y) \\ &= a(bq+x_0) + by \end{aligned}$$

より，$x = bq + x_0$ となる x 用いると，$n = ax + by$ という形に表すことができる．

…… (証明終わり)

(3) $n = (a-1)(b-1)-1$ のとき，$n = ax + by$ となる 0 以上の整数 x, y が存在すると仮定すると

$$\begin{aligned} &(a-1)(b-1)-1 = ax+by \\ &ab - a - b = ax + by \\ &a(b-x-1) = b(y+1) \end{aligned}$$

a, b は互いに素より，整数 k を用いて

$$\begin{cases} b-x-1 = bk \\ y+1 = ak \end{cases}$$

と表すことができる．このとき

$bk = b - x - 1 < b$ より $k < 1$
$ak = y + 1 > 0$ より $k > 0$

すなわち，整数 k は $0 < k < 1$ となるが，このような整数は存在しない．

よって，$n = (a-1)(b-1)-1$ のとき，$n = ax + by$ となる 0 以上の整数 x, y はない．

…… (証明終わり)

(4) n は $n \geqq (a-1)(b-1)$ を満たす整数とする．

(2) より，整数 x, y $(0 \leqq y \leqq a-1)$ を用いて

$$n = ax + by \quad (0 \leqq y \leqq a-1)$$

の形に表すことができる．このとき

$$ax = n - by \geqq (a-1)(b-1) - b(a-1) = -a+1 > -a$$

$a > 0$ より

$$x > -1$$

x は整数であるから，$x \geqq 0$

…… (証明終わり)