$2a+3b+5c=40$ を満たす正の整数 $a,\ b,\ c$ の組の個数は $\boxed{\text{ノハ}}$ 個である．

(18 藤田保衛大 医 1(9))

【答】

ノハ
21

【解答】

$$2a+3b+5c=40 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$2a+3b=5(8-c)$$

$8-c=k$ とおくと，k は整数であり

$$① \iff \begin{cases} c=8-k & \cdots\cdots ② \\ 2a+3b=5k & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③を解く．$(a,\ b)=(k,\ k)$ は③を満たす整数の組の一つであり

$$2k+3k=5k \qquad \cdots\cdots ④$$

③，④の辺々を引くと

$$2(a-k)+3(b-k)=0$$

$$2(a-k)=3(k-b)$$

両辺は 2 と 3 の公倍数であり，最小公倍数 6 の倍数であるから

$$2(a-k)=3(k-b)=6l \quad (l\ \text{は整数})$$

とかける．これを解いて

$$\begin{cases} a=k+3l \\ b=k-2l \end{cases}$$

②もあわせて，$a,\ b,\ c$ は正の整数であるから

$$\begin{cases} k+3l>0 \\ k-2l>0 \\ 8-k>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} -\dfrac{k}{3}<l<\dfrac{k}{2} \\ k<8 \end{cases}$$

$-\dfrac{k}{3}<\dfrac{k}{2}$ より $k>0$ であるから

$$0<k<8$$

$k=1$ のとき，$-\dfrac{1}{3}<l<\dfrac{1}{2}$ より　$l=0$

$k=2$ のとき，$-\dfrac{2}{3}<l<1$ より　$l=0$

$k=3$ のとき，$-1<l<\dfrac{3}{2}$ より　$l=0,\ 1$

$k=4$ のとき，$-\dfrac{4}{3}<l<2$ より　$l=-1,\ 0,\ 1$

$k=5$ のとき，$-\dfrac{5}{3}<l<\dfrac{5}{2}$ より　$l=-1,\ 0,\ 1,\ 2$

$k=6$ のとき，$-2<l<3$ より　$l=-1,\ 0,\ 1,\ 2$

$k=7$ のとき，$-\dfrac{7}{3}<l<\dfrac{7}{2}$ より　$l=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

整数の組 $(k,\ l)$ は

$$1+1+2+3+4+4+6=21\ (\text{個})$$

よって，①を満たす正の整数 $a,\ b,\ c$ の組の個数は **21** 個である．　　……(答)

- ①において，$a,\ b,\ c$ は正の整数であるから

$$5c=40-(2a+3b)<40 \qquad \therefore\quad 0<c<8$$

$c=1$ のとき，$2a+3b=35$ を解いて

$$(a,\ b)=(1,\ 11),\ (4,\ 9),\ (7,\ 7),\ (10,\ 5),\ (13,\ 3),\ (16,\ 1)\ \text{の}\ 6\ \text{個}$$

$c=2$ のとき，$2a+3b=30$ を解いて

$$(a,\ b)=(3,\ 8),\ (6,\ 6),\ (9,\ 4),\ (12,\ 2)\ \text{の}\ 4\ \text{個}$$

$c=3$ のとき，$2a+3b=25$ を解いて

$$(a,\ b)=(2,\ 7),\ (5,\ 5),\ (8,\ 3),\ (11,\ 1)\ \text{の}\ 4\ \text{個}$$

$c=4$ のとき，$2a+3b=20$ を解いて

$$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (4,\ 4),\ (7,\ 2)\ \text{の}\ 3\ \text{個}$$

$c=5$ のとき，$2a+3b=15$ を解いて

$$(a,\ b)=(3,\ 3),\ (6,\ 1)\ \text{の}\ 2\ \text{個}$$

$c=6$ のとき，$2a+3b=10$ を解いて

$$(a,\ b)=(2,\ 2)\ \text{の}\ 1\ \text{個}$$

$c=7$ のとき，$2a+3b=5$ を解いて

$$(a,\ b)=(1,\ 1)\ \text{の}\ 1\ \text{個}$$

よって，①を満たす正の整数 $a,\ b,\ c$ の組の個数は

$$6+4+4+3+2+1+1=21\ (\text{個})$$