整数を係数とする 3 次式

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

について，以下の問いに答えなさい．

(1) 有理数 r が方程式 $f(x) = 0$ の 1 つの解であるとき，r は整数であることを示しなさい．

(2) 整数 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ のいずれも 3 で割り切れないとき，方程式 $f(x) = 0$ は有理数の解をもたないことを示しなさい．

(18 首都大学東京 人文・経済・教養 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

(1) 有理数 r が，整数係数の方程式 $f(x) = 0$ の 1 つの解であるとき

$$r = \frac{p}{q} \quad (p,\ q \text{ は互いに素な整数で } q > 0)$$

とおくと

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$$

$$p^3 + ap^2q + bpq^2 + cq^3 = 0$$

$$\therefore \quad p^3 = q(-ap^2 - bpq - cq^2)$$

が成り立つ．右辺は q の倍数であるから，左辺の p^3 も q の倍数である．p, q は互いに素なので

$$q = 1$$

である．よって，r は整数である． ……(証明終わり)

(2) 背理法を用いる．

$f(x) = 0$ が有理数の解 r をもつと仮定すると，(1) により r は整数である．

$$r \equiv s \pmod 3$$

を満たす s (s は 1, 2, 3 のいずれか) に対し

$$\begin{aligned} f(r) &= r^3 + ar^2 + br + c \\ &\equiv s^3 + as^2 + bs + c \pmod 3 \\ &= f(s) \end{aligned}$$

が成り立つ．

整数 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ がいずれも 3 で割り切れない，すなわち，$s = 1,\ 2,\ 3$ いずれのときも

$$f(s) \not\equiv 0 \pmod 3$$

であるとき，任意の整数 r に対して

$$f(r) \not\equiv 0 \pmod 3$$

である．これは $f(r)=0$ であることに反する．

よって，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ がいずれも 3 の倍数でないならば，$f(x)=0$ は有理数の解 r をもたない． ……(証明終わり)

- 問題文の「$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$」を「$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ 」としても，この命題は成り立つ．
- 任意の自然数 n に対し，命題「$f(1)$，$f(2)$，$\cdots$，$f(n)$ がいずれも n の倍数でないならば，$f(x)=0$ は有理数の解をもたない」は成り立つ．
- 整数係数の n 次方程式

  $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0)$$

  が有理数解をもつならば，それは $\dfrac{a_0\text{の約数}}{a_n\text{の約数}}$ である．