$f(x) = x^2 + x + 105$ とおく．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 52, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) x が 7 で割ると 3 余るような整数のとき，$f(x)$ を 7 で割った余りは 5 であることを示せ.

(2) $n > 4$ のとき，a_n は 7 の倍数であることを示せ.

(3) $n > 4$ のとき，a_n を 5 で割ったときの余りを求めよ.

(4) $n > 4$ のとき，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 21 に等しいことを示せ.

(18 高知大 医・理工・教育 1)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) n が奇数のとき 2，n が偶数のとき 1

(4) 略

【解答】

(1) $x \equiv 3 \pmod 7$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x + 105 \\ &\equiv 3^2 + 3 + 0 \pmod 7 \\ &= 12 \\ &\equiv 5 \pmod 7 \end{aligned}$$

よって，x が 7 で割ると 3 余るような整数のとき，$f(x)$ を 7 で割った余りは 5 である.

…… (証明終わり)

(2) $105 \equiv 0 \pmod 7$ より

$$a_{n+1} \equiv {a_n}^2 + a_n \pmod 7 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，7 を法として

$$\begin{aligned} &a_1 = 52 \equiv 3, \\ &a_2 \equiv 3^2 + 3 = 12 \equiv 5, \\ &a_3 \equiv 5^2 + 5 = 30 \equiv 2, \\ &a_4 \equiv 2^2 + 2 = 6, \\ &a_5 \equiv 6^2 + 6 = 42 \equiv 0, \\ &a_6 \equiv 0^2 + 0 \equiv 0 \end{aligned}$$

である．$a_n \equiv 0 \pmod 7$ と仮定すると

$$a_{n+1} \equiv 0^2 + 0 \equiv 0 \pmod 7$$

であるから，数学的帰納法により $n \geqq 5$ ならば $a_n \equiv 0 \pmod 7$ である.

よって，$n > 4$ のとき，a_n は 7 の倍数である. …… (証明終わり)

(3) $105 \equiv 0 \pmod 5$ より

$$a_{n+1} \equiv {a_n}^2 + a_n \pmod 5 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

より，5 を法として

$$a_1 = 52 \equiv 2,$$
$$a_2 \equiv 2^2 + 2 = 6 \equiv 1,$$
$$a_3 \equiv 1^2 + 1 = 2$$

と順に求められ，以降 1 と 2 を繰り返す.

よって，a_n を 5 で割ったときの余りは

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \textbf{ が奇数のとき} \quad \mathbf{2} \\ \boldsymbol{n} \textbf{ が偶数のとき} \quad \mathbf{1} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(4) $$a_{n+1} = a_n(a_n + 1) + 105$$

a_{n+1} と a_n の最大公約数は，ユークリッドの互除法により，a_n と 105 ($= 3 \cdot 5 \cdot 7$) の最大公約数に等しい.

(2)，(3) より，$n > 4$ のとき，a_n は 7 の倍数であるが 5 の倍数ではないから，$n > 4$ のときの a_n の 3 で割ったときの余りを調べる.

$105 \equiv 0 \pmod 3$ より

$$a_{n+1} \equiv {a_n}^2 + a_n \pmod 3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，3 を法として

$$a_1 = 52 \equiv 1,$$
$$a_2 \equiv 1^2 + 1 = 2,$$
$$a_3 \equiv 2^2 + 2 \equiv 0,$$
$$a_4 \equiv 0^2 + 0 \equiv 0$$

と順に求められ，数学的帰納法により

$$n \geqq 3 \text{ のとき，} a_4 \equiv 0 \pmod 3$$

すなわち，$n \geqq 3$ のとき a_n は 3 の倍数である.

以上より，$n > 4$ のとき，a_n は 7 と 3 の倍数であるが 5 の倍数ではない.

7 と 3 は互いに素であるから，$n > 4$ のとき，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 21 に等しい. …… (証明終わり)