z を複素数とする．複素数平面上の原点 O と，2 点 $\mathrm{A}(z+1)$，$\mathrm{B}(-z+1)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 O，A，B が正三角形の頂点となるような複素数 z を求めよ．

(2) 3 点 O，A，B が鋭角三角形の頂点となるような点 z の全体を複素数平面上に図示せよ．ここで鋭角三角形とは内角がすべて 90° より小さい三角形のことである．

(18 兵庫県大 中期 理 3)

【答】

(1) $z=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

(2) 略

【解答】

(1) 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(z+1)$，$\mathrm{B}(-z+1)$ が正三角形の頂点となる条件は

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB} \text{ かつ } \angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$$

が成り立つことであるから

$$\frac{(-z+1)-0}{(z+1)-0}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

である．以下，複号同順として，式を整理すると

$$\begin{aligned}
&-z+1=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}(z+1)\\
&-2z+2=(1\pm\sqrt{3}i)(z+1)\\
&(3\pm\sqrt{3}i)z=1\mp\sqrt{3}i\\
&\therefore\quad z=\frac{1\mp\sqrt{3}i}{3\pm\sqrt{3}i}=\frac{(1\mp\sqrt{3}i)(\sqrt{3}\mp i)}{\sqrt{3}(3+1)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\mp 4i}{4\sqrt{3}}=\mp\frac{i}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{z=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\mathrm{OA}=|z+1|$，$\mathrm{OB}=|-z+1|=|z-1|$，$\mathrm{AB}=|(-z+1)-(z+1)|=|2z|$ である．$\triangle\mathrm{OAB}$ が鋭角三角形となる条件は次の 3 つの不等式が成り立つことである．

$$\begin{cases}
\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2>\mathrm{AB}^2 & \cdots\cdots ①\\
\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2>\mathrm{OB}^2 & \cdots\cdots ②\\
\mathrm{OB}^2+\mathrm{AB}^2>\mathrm{OA}^2 & \cdots\cdots ③
\end{cases}$$

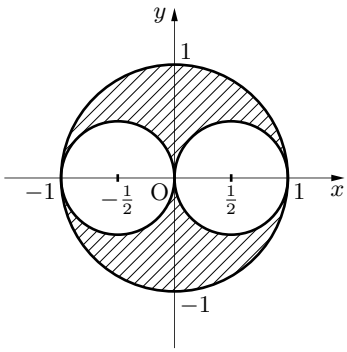
① について

$$\begin{aligned}
&① \iff |z+1|^2+|z-1|^2>|2z|^2\\
&(z+1)(\overline{z}+1)+(z-1)(\overline{z}-1)>4z\overline{z}\\
&(z\overline{z}+z+\overline{z}+1)+(z\overline{z}-z-\overline{z}+1)>4z\overline{z}\\
&\therefore\quad z\overline{z}<1 \qquad \therefore\quad |z|<1 \qquad \cdots\cdots ①'
\end{aligned}$$

② について

$$\begin{aligned}
&② \iff |z+1|^2+|2z|^2>|z-1|^2\\
&(z\overline{z}+z+\overline{z}+1)+4z\overline{z}>z\overline{z}-z-\overline{z}+1\\
&2z\overline{z}+z+\overline{z}>0\\
&\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{4} \qquad \therefore\quad \left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ②'
\end{aligned}$$

③ について

$$
\begin{aligned}
&③ \iff |z-1|^2+|2z|^2>|z+1|^2\\
&(z\overline{z}-z-\overline{z}+1)+4z\overline{z}>z\overline{z}+z+\overline{z}+1\\
&2z\overline{z}-z-\overline{z}>0\\
&\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{4}\\
&\therefore\quad \left|z-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ③'
\end{aligned}
$$

条件を満たす点 z の全体は ①′, ②′, ③′ の共通部分であり，図示すると，右図の斜線部分となる．境界線はすべて除く．