複素数平面上に 4 点 A$(1+i)$，B$(2-i)$，C$(-8+3i)$，D$(x+yi)$ (x, y は実数) がある．3 点 A，B，D が一直線上にあり，直線 AC と直線 DC が直交するとき $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$y=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(18 名城大 理工 1(1))

【答】

ア	イ
$-\dfrac{72}{13}$	$\dfrac{183}{13}$

【解答】

$\alpha=1+i,\ \beta=2-i,\ \gamma=-8+3i,\ z=x+yi$ とおく．

A(α), B(β), D(z) が一直線上にある条件は，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表されることであり，これを複素数で表すと

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\ \text{が実数}$$

$$\iff \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}-\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}=0$$

$$\iff (\overline{\beta}-\overline{\alpha})(z-\alpha)-(\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=0 \qquad \cdots\cdots ① \quad (\because\ \beta-\alpha\fallingdotseq 0)$$

となる．また，直線 AC と直線 DC が直交する条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}\ \text{または}\ \mathrm{D}=\mathrm{C}$$

であり，複素数で表すと

$$\frac{z-\gamma}{\alpha-\gamma}\ \text{が純虚数 または}\ 0$$

$$\iff \frac{z-\gamma}{\alpha-\gamma}+\overline{\left(\frac{z-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)}=0$$

$$\iff (\overline{\alpha}-\overline{\gamma})(z-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\overline{z}-\overline{\gamma})=0 \qquad \cdots\cdots ② \quad (\because\ \gamma-\alpha\fallingdotseq 0)$$

となる．①, ② より，$\overline{z}$ を消去すると

$$\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\beta-\alpha}(z-\alpha)+\overline{\alpha}=-\frac{\overline{\alpha}-\overline{\gamma}}{\alpha-\gamma}(z-\gamma)+\overline{\gamma}$$

$$\left(\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\beta-\alpha}+\frac{\overline{\alpha}-\overline{\gamma}}{\alpha-\gamma}\right)z=\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\beta-\alpha}\alpha+\frac{\overline{\alpha}-\overline{\gamma}}{\alpha-\gamma}\gamma+\overline{\gamma}-\overline{\alpha}$$

を得る．

$$\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\beta-\alpha}=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{1+4}=\frac{-3+4i}{5},$$

$$\frac{\overline{\alpha}-\overline{\gamma}}{\alpha-\gamma}=\frac{9+2i}{9-2i}=\frac{(9+2i)^2}{81+4}=\frac{77+36i}{85}$$

であるから

$$\frac{17(-3+4i)+(77+36i)}{85}z=\frac{-3+4i}{5}(1+i)+\frac{77+36i}{85}(-8+3i)$$
$$+(-8-3i)-(1-i)$$

$$\frac{26+104i}{85}z=\frac{-7+i}{5}-\frac{724+57i}{85}-9-2i$$

$$(26+104i)z=17(-7+i)-(724+57i)-85(9+2i)$$

$$26(1+4i)z=-1608-210i$$

よって

$$z = -\frac{804+105i}{13(1+4i)} = -\frac{(804+105i)(1-4i)}{13(1+16)}$$
$$= -\frac{1224-3111i}{13\cdot 17} = -\frac{72}{13}+\frac{183}{13}i$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = -\frac{72}{13}}, \quad \boldsymbol{y = \frac{183}{13}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ベクトルとして解くと次のようになる．
  $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (-8,\ 3)$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (x,\ y)$ とおく．
  A，B，D が一直線上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \cdots\cdots ⓐ$$

と表すことができ，直線 AC と直線 DC が直交するから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}) = 0 \qquad \cdots\cdots ⓑ$$

が成り立つ．ⓐ, ⓑ を連立すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} - t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-9,\ 2)\cdot(-9,\ 2) = 81+4 = 85$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-9,\ 2)\cdot(1,\ -2) = -9-4 = -13$$

であるから

$$\therefore \quad t = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = -\frac{85}{13}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1,\ 1) - \frac{85}{13}(1,\ -2) = \frac{1}{13}(-72,\ 183)$$
$$\therefore \quad x = -\frac{72}{13},\ y = \frac{183}{13}$$

である．

- 実平面において，2 点 A$(1,\ 1)$，B$(2,\ -1)$ を通る直線方程式は

$$y = -2(x-1)+1$$
$$\therefore \quad y = -2x+3 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

であり，点 C$(-8,\ 3)$ を通り AC に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{9}{2}(x+8)+3$$
$$\therefore \quad y = \frac{9}{2}x+39 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

である．よって，㋐，㋑を連立して解くと

$$x = -\frac{72}{13},\ y = \frac{183}{13}$$

を得る．