複素数平面において，次の問に答えよ．

(1) 異なる 2 点 w_1, w_2 を通る直線上の点 z を媒介変数 t を用いて表せ．

(2) (1) において t を消去し，z と $\overline{z}$ の関係式を求めよ．

(3) w_1, w_2 を結ぶ線分の垂直二等分線を，$\alpha z+\beta\overline{z}=\gamma$ の形で表せ．ただし，α, β, γ は w_1, w_2 で表されるものとする．

(4) 実軸および虚軸上にない点 $\mathrm{A}(w)$ と点 $\mathrm{B}(\overline{w})$ について，$\triangle\mathrm{OAB}$ の外心に対応する複素数 v を求めよ．ただし，O は原点である．

(18 大阪教大 3)

【答】

(1) $z=w_1+t(w_2-w_1)$ (t は実数)

(2) $(\overline{w_2}-\overline{w_1})z-(w_2-w_1)\overline{z}=w_1\overline{w_2}-\overline{w_1}w_2$

(3) $(\overline{w_2}-\overline{w_1})z+(w_2-w_1)\overline{z}=w_2\overline{w_2}-w_1\overline{w_1}$

(4) $v=\dfrac{w\overline{w}}{w+\overline{w}}$

【解答】

(1) w_1, w_2, z が表す点をそれぞれ A_1, A_2, P とおく．P は直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}}=t\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\ (t\text{ は実数})$$

と表すことができ，これを複素数で表すと

$$z-w_1=t(w_2-w_1)\ (t\text{ は実数})$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{z=w_1+t(w_2-w_1)\ (t\text{ は実数})}\qquad\cdots\cdots ①\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ① をさらに変形する．

$$① \iff \frac{z-w_1}{w_2-w_1}\text{ は実数}\quad (\because\ w_1\neq w_2)$$

$$\iff \frac{z-w_1}{w_2-w_1}-\overline{\left(\frac{z-w_1}{w_2-w_1}\right)}=0$$

$$\therefore\quad \frac{z-w_1}{w_2-w_1}-\frac{\overline{z}-\overline{w_1}}{\overline{w_2}-\overline{w_1}}=0$$

$$\therefore\quad (\overline{w_2}-\overline{w_1})(z-w_1)-(w_2-w_1)(\overline{z}-\overline{w_1})=0\quad (\because\ w_1\neq w_2)$$

よって，求める関係式は

$$\boldsymbol{(\overline{w_2}-\overline{w_1})z-(w_2-w_1)\overline{z}=w_1\overline{w_2}-\overline{w_1}w_2}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\mathrm{P}(z)$ が $\mathrm{A}_1(w_1)$, $\mathrm{A}_2(w_2)$ を結ぶ線分の垂直二等分線上にある条件は

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1\mathrm{P}=\mathrm{A}_2\mathrm{P} &\iff |z-w_1|=|z-w_2|\\
&\iff |z-w_1|^2=|z-w_2|^2\\
&\iff (z-w_1)(\overline{z}-\overline{w_1})=(z-w_2)(\overline{z}-\overline{w_2})\\
&\iff z\overline{z}-\overline{w_1}z-w_1\overline{z}+w_1\overline{w_1}=z\overline{z}-\overline{w_2}z-w_2\overline{z}+w_2\overline{w_2}\\
&\iff (\overline{w_2}-\overline{w_1})z+(w_2-w_1)\overline{z}=w_2\overline{w_2}-w_1\overline{w_1}
\end{aligned}$$

である．

よって，求める関係式は

$$\boldsymbol{(\overline{w_2}-\overline{w_1})z+(w_2-w_1)\overline{z}=w_2\overline{w_2}-w_1\overline{w_1}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (2) の利用を考える．

  線分 A_1A_2 の中点を $A_M(w_M)$ とし，A_2 を A_M のまわりに $\frac{\pi}{2}$ 回転した点を $A_3(w_3)$ とおくと，(2) より，求める方程式は

$$(\overline{w_3}-\overline{w_M})z-(w_3-w_M)\overline{z}=w_M\overline{w_3}-\overline{w_M}w_3 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

である．ここで

$$w_M=\frac{w_1+w_2}{2}$$

であり

$$\begin{aligned} w_3-w_M &= (w_2-w_M)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(w_2-\frac{w_1+w_2}{2}\right)i \\ &= \frac{i}{2}(w_2-w_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_M\overline{w_3} &= w_M\overline{\left\{w_M+\frac{i}{2}(w_2-w_1)\right\}} \\ &= w_M\overline{w_M}-\frac{i}{2}w_M(\overline{w_2}-\overline{w_1}) \\ &= w_M\overline{w_M}+\frac{i}{4}(w_1+w_2)(\overline{w_1}-\overline{w_2}) \\ &= w_M\overline{w_M}+\frac{i}{4}(w_1\overline{w_1}+w_2\overline{w_1}-w_1\overline{w_2}-w_2\overline{w_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad & w_M\overline{w_3}-\overline{w_M}w_3 \\ &= w_M\overline{w_3}-\overline{w_M\overline{w_3}} \\ &= \left\{w_M\overline{w_M}+\frac{i}{4}(w_1\overline{w_1}+w_2\overline{w_1}-w_1\overline{w_2}-w_2\overline{w_2})\right\} \\ &\quad -\left\{\overline{w_M}w_M-\frac{i}{4}(\overline{w_1}w_1+\overline{w_2}w_1-\overline{w_1}w_2-\overline{w_2}w_2)\right\} \\ &= \frac{i}{2}(\overline{w_1}w_1-\overline{w_2}w_2) \end{aligned}$$

であるから，㋐ は

$$-\frac{i}{2}(\overline{w_1}-\overline{w_2})z-\frac{i}{2}(w_2-w_1)=\frac{i}{2}(\overline{w_1}w_1-\overline{w_2}w_2)$$

$$\therefore\quad (\overline{w_2}-\overline{w_1})z+(w_2-w_1)\overline{z}=w_2\overline{w_2}-w_1\overline{w_1}$$

となる．

(4) $A(w)$ と $B(\overline{w})$ は実軸について対称であり，△OAB の外心 $Q(v)$ は実軸上にある．したがって，v は実数であり

$$\overline{v}=v \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．また，$Q(v)$ は OA の垂直二等分線上にあるので，(3) の結果より

$$(\overline{w}-\overline{0})v+(w-0)\overline{v}=w\overline{w}-0\overline{0}$$

$$(\overline{w}+w)v=w\overline{w} \quad (\because ②)$$

が成り立つ．$A(w)$ が虚軸上にないから，$\overline{w}+w\fallingdotseq 0$ であり

$$\boldsymbol{v=\frac{w\overline{w}}{w+\overline{w}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．