複素数 $z$ を $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ とおく．ただし，$i$ は虚数単位とする．また，自然数 $n$ に対し，$z^{n+2}$ は 1 の 4 乗根，$z^{n+1}$ は 1 の 3 乗根であるとする．

(1) $f(x) = x^2 + x + 1$ とおく．このとき $f(z^4)$ の値を求めよ．
(2) $n + 5$ を 12 で割った余り $r$ を求めよ．
(3) $z^{n+11}$ の偏角 $\theta$ を求めよ．ただし，$\theta$ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(18 室蘭工大 3)

---

【答】
(1) $f(z^4) = 0$
(2) $r = 0$
(3) $\theta = \pi$

---

【解答】

$$z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ①より

$$\begin{aligned} z^4 &= \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} \quad (\because\ \text{ド・モアブルの定理}) \\ &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$(z^4)^3 = 1$，$z^4 \fallingdotseq 1$ より，$z^4$ は 1 の虚数立方根である．$\omega = z^4$ とおくと

$$\omega^3 = 1$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$\omega \fallingdotseq 1$ より　$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

よって

$$f(z^4) = f(\omega) = \omega^2 + \omega + 1 = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 直接代入し計算してもよい．

$$\begin{aligned} f(z^4) &= z^8 + z^4 + 1 \\ &= \left(\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}\right) + 1 \\ &\qquad\qquad (\because\ \text{ド・モアブルの定理}) \\ &= \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + 1 \\ &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) $z^{n+2}$ は 1 の 4 乗根であるから

$$(z^{n+2})^4 = 1$$

$$z^{4n+8} = 1$$

$$\cos\frac{(2n+4)\pi}{3} + i\sin\frac{(2n+4)\pi}{3} = 1$$

であるから，$k$ を整数として

$$\frac{(2n+4)\pi}{3} = 2k\pi$$

$$n = 3k - 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

また，$z^{n+1}$ は 1 の 3 乗根であるから

$$(z^{n+1})^3 = 1$$

$$z^{3n+3} = 1$$

$$\cos\frac{(n+1)\pi}{2} + i\sin\frac{(n+1)\pi}{2} = 1$$

であるから，$l$ を整数として

$$\frac{(n+1)\pi}{2} = 2l\pi$$

$$n = 4l - 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

「①かつ②」より

$$\begin{cases} n+5 = 3k+3 \\ n+5 = 4l+4 \end{cases}$$

であり，$n+5$ は「(3 の倍数) かつ (4 の倍数)」，すなわち (12 の倍数) である．

よって，$n+5$ を 12 で割ったときの余り $r$ は

$$\boldsymbol{r = 0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) (2) より，$n+5 = 12p$ ($p$ は整数) とおけるから

$$z^{n+5} = z^{12p} = \cos 2p\pi + i\sin 2p\pi = 1$$

である．これより

$$z^{n+11} = z^{n+5}\cdot z^6 = 1\cdot z^6 = z^6 = \cos\pi + i\sin\pi$$

であり，$z^{n+11}$ の偏角 $\theta$ ($0 \leqq \theta < 2\pi$) は

$$\boldsymbol{\theta = \pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$