複素数平面上の 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) を頂点とする四角形 ABCD を考える．ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が 180° より小さい四角形 (凸四角形) であるとする．また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A，B，C，D の順に並んでいるとする．四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB，BC，CD，DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB，BQC，CRD，DSA を作る．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を表す複素数を求めよ．

(2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ．

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ．

(18 広島大 理系 2)

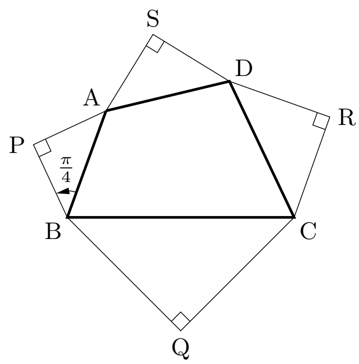
【答】

(1) $\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta$

(2) 四角形 ABCD は平行四辺形である．

(3) 略

【解答】



(1) P を表す複素数を z_{P} とおく．線分 BP は点 B を中心に線分 BA を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍して，$\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものだから

$$z_{\mathrm{P}}-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{1}{2}(1+i)(\alpha-\beta)$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{z_{\mathrm{P}}=\frac{1+i}{2}\alpha+\frac{1-i}{2}\beta}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) Q，R，S を表す複素数をそれぞれ z_{Q}，z_{R}，z_{S} とおくと，(1) と同様に

$$z_{\mathrm{Q}}=\frac{1+i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma,$$
$$z_{\mathrm{R}}=\frac{1+i}{2}\gamma+\frac{1-i}{2}\delta,$$
$$z_{\mathrm{S}}=\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha$$

である．このとき

$$\text{四角形 PQRS が平行四辺形}\iff\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}\iff z_{\mathrm{Q}}-z_{\mathrm{P}}=z_{\mathrm{R}}-z_{\mathrm{S}}\cdots\cdots(*)$$

であるから，$(*)$ を α, β, γ, δ で表し，整理すると

$$(*)\iff\frac{1+i}{2}(\beta-\alpha)+\frac{1-i}{2}(\gamma-\beta)=\frac{1+i}{2}(\gamma-\delta)+\frac{1-i}{2}(\delta-\alpha)$$
$$\frac{1+i}{2}(\beta-\alpha-\gamma+\delta)+\frac{1-i}{2}(\gamma-\beta-\delta+\alpha)=0$$
$$\left(\frac{1+i}{2}-\frac{1-i}{2}\right)(\beta-\alpha-\gamma+\delta)=0$$
$$i(\beta-\alpha-\gamma+\delta)=0$$
$$\therefore\quad\beta-\alpha=\gamma-\delta\qquad\cdots\cdots ①$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ であり，求める必要十分条件は

四角形 ABCD は平行四辺形である …… (証明終わり)

ことである

(3) 四角形 PQRS は平行四辺形だから，① が成り立つ．この条件の下で四角形 PQRS の隣り合う 2 辺 PQ，PS の関係について調べる．

$$\frac{z_\mathrm{S} - z_\mathrm{P}}{z_\mathrm{Q} - z_\mathrm{P}} = \frac{\dfrac{1+i}{2}(\delta - \alpha) + \dfrac{1-i}{2}(\alpha - \beta)}{\dfrac{1+i}{2}(\beta - \alpha) + \dfrac{1-i}{2}(\gamma - \beta)}$$

①より，$\delta - \alpha = \gamma - \beta$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{z_\mathrm{S} - z_\mathrm{P}}{z_\mathrm{Q} - z_\mathrm{P}} &= \frac{(1+i)(\gamma - \beta) + (1-i)(\alpha - \beta)}{(1+i)(\beta - \alpha) + (1-i)(\gamma - \beta)} \\ &= \frac{(\alpha - 2\beta + \gamma) + i(\gamma - \alpha)}{(\gamma - \alpha) + i(2\beta - \gamma - \alpha)} \\ &= i\,\frac{i(2\beta - \gamma - \alpha) + (\gamma - \alpha)}{(\gamma - \alpha) + i(2\beta - \gamma - \alpha)} \\ &= i \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PQ}} = 1$，$\angle\mathrm{QPS} = \dfrac{\pi}{2}$ であり，四角形 PQRS は正方形である．

…… (証明終わり)