複素数平面上で 3 つの複素数

$$0,\ 1+\sqrt{3}i,\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i$$

が表す点をそれぞれ O，A，B とする．ただし，i は虚数単位である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) △OAB において ∠AOB の大きさ，および辺 OA，OB の長さを求めよ．
(2) △OAB の外接円の中心を表す複素数を求めよ．

(18 弘前大 理工・医・教育 3)

【答】

(1) $\angle\text{AOB}=\dfrac{\pi}{4},\ \text{OA}=2,\ \text{OB}=2$

(2) $\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2}i$

【解答】

(1) $\alpha=1+\sqrt{3}i,\ \beta=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i$ とおく．O(0)，A(α)，B(β) であり

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}&=\frac{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i}{1+\sqrt{3}i}\\&=\frac{\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})i\}(1-\sqrt{3}i)}{2(1+3)}\\&=\frac{\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+(\sqrt{6}+3\sqrt{2})\}+\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(\sqrt{6}-3\sqrt{2})\}i}{8}\\&=\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

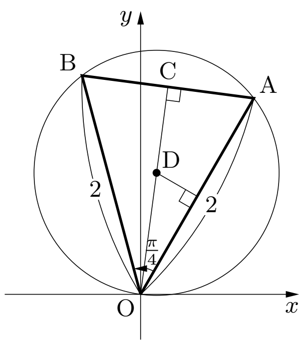
$$\therefore\quad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=1,\quad \arg\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{4}$$

$|\alpha|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから

$$\boldsymbol{\angle\text{AOB}=\frac{\pi}{4},\quad \text{OA}=2,\quad \text{OB}=2}$$ ……(答)

である．

(2) 辺 AB の中点を C(γ)，△OAB の外心を D(δ) とおく．
(1) から △OAB は OA = OB の二等辺三角形であるから，
OC ⊥ AB であり，外心 D は線分 OC 上にある．



$$\begin{aligned}\delta&=\frac{\text{OD}}{\text{OC}}\gamma=\frac{\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}}{2\cos\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\\&=\frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{8}}\cdot(\alpha+\beta)=\frac{1}{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}\cdot(\alpha+\beta)\\&=\frac{1}{2+\sqrt{2}}\left\{1+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)i\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}\left(\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i\right)\\&=(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{6}+1+\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2}i}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

- △OAB の外心 D(δ) は線分 OA，OB の垂直二等分線の交点である．
  線分 OA の垂直二等分線は

$$|\delta|^2 = |\delta - \alpha|^2$$
$$-\overline{\alpha}\delta - \alpha\overline{\delta} + \alpha\overline{\alpha} = 0$$

$|\alpha| = 2$ より

$$\overline{\alpha}\delta + \alpha\overline{\delta} = 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

同じく，線分 OB の垂直二等分線は

$$\overline{\beta}\delta + \beta\overline{\delta} = 4 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② を連立し，$\overline{\delta}$ を消去すると

$$(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})\delta = 4(\beta - \alpha)$$

ここで

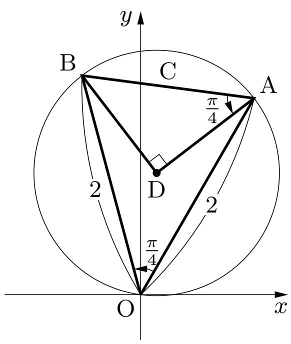
$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} &= (1-\sqrt{3}i)\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i\right) \\
&\quad - (1+\sqrt{3}i)\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+(\sqrt{6}+3\sqrt{2})}{2} + \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{2}i \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+(\sqrt{6}+3\sqrt{2})}{2} - \frac{(\sqrt{6}-3\sqrt{2})-(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}i \\
&= \{(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(\sqrt{6}-3\sqrt{2})\}i \\
&= 4\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{4}{4\sqrt{2}i}(\beta - \alpha) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\left(1 - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)i\right\} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2}i
\end{aligned}$$

を得る．

- 線分 AD は線分 AB を A を中心に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍して，$\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものである．



$$\delta - \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\beta - \alpha)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \delta &= \alpha + \frac{1+i}{2}(\beta - \alpha) \\
&= \frac{1-i}{2}\alpha + \frac{1+i}{2}\beta \\
&= \frac{1-i}{2}\cdot(1+\sqrt{3}i) \\
&\quad + \frac{1+i}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{2} \\
&= \frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i}{2} + \frac{-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}i}{4} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2}i
\end{aligned}$$

となる．