α を複素数とする．$z \fallingdotseq -\alpha$ をみたす複素数 z に対して，$w = \dfrac{z+2\alpha}{z+\alpha}$ と定める．$|z-1|=1$ をみたすようなすべての z に対して，$|w-1|=1$ が成り立つ．次の問いに答えよ．

(1) α を求めよ．

(2) $w=z$ をみたす z を求めよ．

(3) $z_0 = 1+i$ とし，$z \fallingdotseq z_0$ かつ $z \fallingdotseq -\alpha$ とする．複素数平面上の 3 点 A(z_0)，P(z)，Q(w) を考える．直線 AP と直線 AQ が垂直に交わるような点 P の全体が表す図形を，複素数平面上に図示せよ．

(18 横浜国大 理工・都市科 3)

【答】

(1) $\alpha = -1$

(2) $z = 1 \pm i$

(3) 略

【解答】

$$w = \frac{z+2\alpha}{z+\alpha} \quad (z \fallingdotseq -\alpha) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ①より

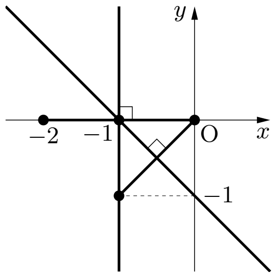
$$\begin{aligned} |w-1| = 1 &\iff \left| \frac{z+2\alpha}{z+\alpha} - 1 \right| = 1 \\ &\iff \left| \frac{\alpha}{z+\alpha} \right| = 1 \\ &\iff |z+\alpha| = |\alpha| \quad (\because\ z \fallingdotseq -\alpha) \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

$|z-1|=1$ をみたすようなすべての z に対して，②が成り立つような α を求める．

$z=2,\ 1+i$ はともに $|z-1|=1$ をみたす．この z に対して②は

$$|\alpha+2| = |\alpha|, \quad |\alpha+1+i| = |\alpha|$$

となる．α は点 -2 と原点 0 を結ぶ線分の二等分線上の点であり，かつ点 $-1-i$ と原点 0 を結ぶ線分の二等分線上の点でもある．したがって，α は 2 直線の交点であり $\alpha=-1$ である．



逆に，$\alpha=-1$ であれば，②は $|z-1|=1$ であるから，$|z-1|=1$ をみたすようなすべての z に対して，②が成り立つ．

よって，$\boldsymbol{\alpha = -1}$ である ……(答)

(2) (1) より ① は $w = \dfrac{z-2}{z-1}$ $(z \fallingdotseq 1)$ であり

$$\begin{aligned} w = z &\iff \frac{z-2}{z-1} = z \\ &\iff z(z-1) = z-2 \ (\because\ z \fallingdotseq 1) \\ &\therefore\ z^2 - 2z + 2 = 0 \\ &\therefore\ \boldsymbol{z = 1 \pm i} \end{aligned}$$

……(答)

(3) $z_0 = 1+i$, $z \neq z_0$, $z \neq 1$, $w = \dfrac{z-2}{z-1}$ のとき，3 点 $\mathrm{A}(z_0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ については

$z \neq z_0$ より，$\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$ である．

$\mathrm{Q} = \mathrm{A}$ と仮定すると，$w = z_0$ であり

$$\frac{z-2}{z-1} = 1+i \iff z-2 = (1+i)(z-1) \ (\because\ z \neq 1)$$

$$\therefore\quad iz = -1+i \qquad \therefore\quad z = \frac{-1+i}{i} = i+1$$

これは $z \neq z_0$ に反する．したがって，$\mathrm{Q} \neq \mathrm{A}$ である．

これより，直線 AP と直線 AQ が直交するための条件は

$$\angle \mathrm{PAQ} = \pm\frac{\pi}{2}，すなわち\ \frac{w-z_0}{z-z_0}\ が純虚数となる$$

ことである．

$$\begin{aligned}\frac{w-z_0}{z-z_0} &= \frac{\dfrac{z-2}{z-1}-(1+i)}{z-(1+i)}\\ &= \frac{-iz-1+i}{(z-1-i)(z-1)}\\ &= \frac{-i(z-i-1)}{(z-1-i)(z-1)}\\ &= \frac{-i}{z-1} \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

③が純虚数となる条件は

$$\frac{-i}{z-1} + \overline{\left(\frac{-i}{z-1}\right)} = 0 \text{ かつ } \frac{-i}{z-1} \neq 0$$

$\dfrac{-i}{z-1}$ はつねに 0 でないから，求める条件は

$$\frac{-i}{z-1} + \overline{\left(\frac{-i}{z-1}\right)} = 0$$

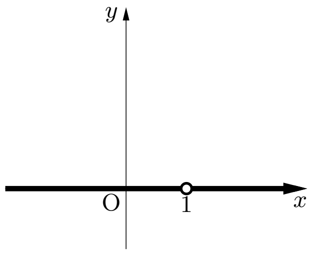
$$\therefore\quad \frac{-i}{z-1} + \frac{i}{\overline{z}-1} = 0$$

$$\therefore\quad \frac{i(z-\overline{z})}{|z-1|^2} = 0$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\overline{z} = z\\ z \neq 1\end{cases}$$

すなわち，z は 1 でない実数である．

よって，求める点 $\mathrm{P}(z)$ 全体が表す図形は，右図の太線部分 (白丸を除く) である．



- ③が純虚数となる条件を次のように解いてもよい．

$$\frac{-i}{z-1} = ki \quad (k \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

$$\iff \begin{cases} z-1 = -\dfrac{1}{k}\\ z-1 \neq 0 \text{ (これは上式に含まれる)}\end{cases}$$

$$\therefore\quad z = 1 - \frac{1}{k}$$

k は 0 でない実数をすべて動くから，z は 1 でない実数をすべて動く．