複素数 z_1，z_2 が $|z_1| = |z_2| = 1$ を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $z_1 + z_2 = \dfrac{3}{2}$ を満たす z_1，z_2 を求めよ．

(2) $z_1 + z_2 = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ を満たす z_1，z_2 を求めよ．

(3) 複素数 α を $|\alpha| = 1$ を満たす定数とする．このとき，$z_1 + z_2 = 2 + \alpha$ を満たす z_1，z_2 が存在するような α について，そのような α 全体が複素数平面上に描く図形を図示せよ．

(18 秋田大 医 9)

【答】

(1) $(z_1,\ z_2) = \left(\dfrac{3}{4} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{4}i,\ \dfrac{3}{4} \mp \dfrac{\sqrt{7}}{4}i\right)$ (複号同順)

(2) $(z_1,\ z_2) = \left(\dfrac{3 \mp \sqrt{21}}{8} + \dfrac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{8}i,\ \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{8} + \dfrac{3\sqrt{3} \mp \sqrt{7}}{8}i\right)$ (複号同順)

(3) 略

【解答】

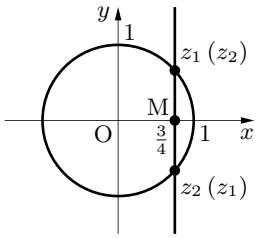
(1) 複素数平面上で 2 点 z_1 と z_2 は

$$|z_1| = |z_2| = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

より，原点 O を中心とする単位円上にある．また，$z_1 + z_2 = \dfrac{3}{2}$ より

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3}{4}$$

であるから，z_1 と z_2 の中点は点 $\dfrac{3}{4}$ である．



z_1 と z_2 の中点を M とすると，O を中心とする円周上の 2 点 z_1，z_2 を結ぶ線分の垂直二等分線は中心 O を通るから，z_1，z_2 は M を通り OM に垂直な直線と原点を中心とする単位円との交点である．したがって，z_1，z_2 の

実部は　$\dfrac{3}{4}$

虚部は　$\pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

である．よって

$$\boldsymbol{(z_1,\ z_2) = \left(\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i,\ \frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{7}}{4}i\right)} \quad \textbf{(複号同順)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $\omega = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくと，条件より

$$z_1 + z_2 = \frac{3}{2}\omega \iff \frac{z_1}{\omega} + \frac{z_2}{\omega} = \frac{3}{2}$$

であり，①と $|\omega| = 1$ より

$$\left|\frac{z_1}{\omega}\right| = \left|\frac{z_2}{\omega}\right| = 1$$

でもある．(1) の結果より

$$\left(\frac{z_1}{\omega},\ \frac{z_2}{\omega}\right)=\left(\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i,\ \frac{3}{4}\mp\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)\quad\text{(複号同順)}$$

である．よって

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{z_1},\ \boldsymbol{z_2})&=\left(\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}\omega,\ \frac{3\mp\sqrt{7}i}{4}\omega\right)\\&=\left(\frac{(3\pm\sqrt{7}i)(1+\sqrt{3}i)}{8},\ \frac{(3\mp\sqrt{7}i)(1+\sqrt{3}i)}{8}\right)\\&=\boldsymbol{\left(\frac{3\mp\sqrt{21}}{8}+\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{8}i,\ \frac{3\pm\sqrt{21}}{8}+\frac{3\sqrt{3}\mp\sqrt{7}}{8}i\right)}\end{aligned}$$

(複号同順) ……(答)

- $\omega=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ は原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転を表す複素数である．

(3) $\qquad z_1+z_2=2+\alpha \qquad \cdots\cdots$ ②

ただし，α は $|\alpha|=1$ を満たす定数である．

$$\text{① かつ ②}\iff\begin{cases}|z_1|=|z_2|=1\\z_2=2+\alpha-z_1\end{cases}\iff\begin{cases}z_2=2+\alpha-z_1\\|z_1|=1\\|2+\alpha-z_1|=1\end{cases}$$

より，①かつ② を満たす z_1，z_2 が存在する条件は

$$\begin{cases}|z|=1\\|z-2-\alpha|=1\end{cases}\quad\text{を満たす } z \text{ が存在する}$$

ことである．z は 2 つの円上の点であり，2 円が共有点をもつ条件は

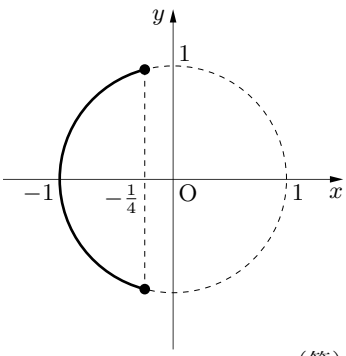
(半径の差) $\leqq$ (中心間の距離) $\leqq$ (半径の和)

であるから

$$1-1\leqq|2+\alpha|\leqq1+1$$
$$\therefore\quad|\alpha+2|\leqq2$$

したがって，α の条件は

$$\begin{cases}|\alpha|=1\\|\alpha+2|\leqq2\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}\alpha\overline{\alpha}=1\\\alpha\overline{\alpha}+2\alpha+2\overline{\alpha}+4\leqq4\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}|\alpha|=1\\\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}\leqq-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}|\alpha|=1\\(\alpha\text{ の実部})\leqq-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$



であり，α の動く範囲は**図の太線部分**である．端点も含む． ……(答)

- 円弧の端点は $-\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}i$ である．