0 でない複素数 $z=x+yi$ について，次の問いに答えよ．ここで、x は z の実部，y は z の虚部であり，i は虚数単位である．

(1) $z+\dfrac{4}{z}$ の実部と虚部を $x,\ y$ を用いて表せ．

(2) x が 0 以外の実数全体を動くとき，$x+\dfrac{4}{x}$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $z+\dfrac{4}{z}$ が実数で，さらに不等式 $2 \leqq z+\dfrac{4}{z} \leqq 5$ を満たすとき，点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を xy 座標平面上に図示せよ．

(18 関西大 シス理工・環境都市・化生工 3)

【答】

(1) 実部は $\dfrac{x(x^2+y^2+4)}{x^2+y^2}$，虚部は $\dfrac{y(x^2+y^2-4)}{x^2+y^2}$

(2) $x+\dfrac{4}{x} \leqq -4,\ 4 \leqq x+\dfrac{4}{x}$

(3) 略

【解答】

(1) $z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) のとき

$$\begin{aligned} z+\frac{4}{z} &= x+yi+\frac{4}{x+yi} \\ &= x+yi+\frac{4(x-yi)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x(x^2+y^2+4)+y(x^2+y^2-4)i}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

である．よって，$z+\dfrac{4}{z}$ の

実部は $\boldsymbol{\dfrac{x(x^2+y^2+4)}{x^2+y^2}}$，　**虚部は** $\boldsymbol{\dfrac{y(x^2+y^2-4)}{x^2+y^2}}$ ……(答)

である．

(2) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ $(x \fallingdotseq 0)$ とおく．$f(x)$ は奇関数であるから，グラフは原点に関して対称である．$x>0$ の範囲で考える．

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

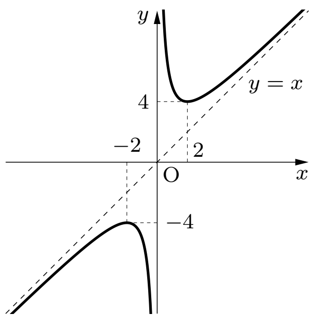
$f(x)$ の増減は右表となる．さらに

$$\lim_{x\to(+0)} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

であり，$x<0$ の範囲もあわせて $y=f(x)$ を図示すると右図となる．以上より $f(x)$ のとりうる値の範囲は

$\boldsymbol{f(x) \leqq -4,\ 4 \leqq f(x)}$ ……(答)

である．



- $Y=x+\dfrac{4}{x}$ $(x \fallingdotseq 0)$ …… ㋐ とおく．

  $$㋐ \iff x^2-Yx+4=0 \qquad \cdots\cdots ㋐'$$

  Y のとりうる値の範囲は，㋐$'$ を満たす実数 x が存在するような Y の集合である．方程式 ㋐$'$ が実数解をもつ条件は (判別式) $\geqq 0$ であり

  $$Y^2-4\cdot 4 \geqq 0 \qquad \therefore\quad Y \leqq -4,\ 4 \leqq Y$$

  である．

(3) $z+\dfrac{4}{z}$ が実数であるから，(1) より

$$\frac{y(x^2+y^2-4)}{x^2+y^2}=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．①を変形すると

$$① \iff \begin{cases} y(x^2+y^2-4)=0 \\ x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad x^2+y^2=4$$

である．①の下では $z+\dfrac{4}{z}=\dfrac{x(x^2+y^2+4)}{x^2+y^2}$ であるから

$$2 \leqq z+\frac{4}{z} \leqq 5 \iff 2 \leqq \frac{x(x^2+y^2+4)}{x^2+y^2} \leqq 5 \qquad \cdots\cdots ②$$

である.「① かつ ②」を満たす x, y の条件を求める．

(i) 「$y=0$ かつ $x \neq 0$」のとき

$$\frac{x(x^2+y^2+4)}{x^2+y^2}=\frac{x(x^2+0+4)}{x^2+0}=x+\frac{4}{x}$$

であるから

$$② \iff 2 \leqq x+\frac{4}{x} \leqq 5 \iff 4 \leqq x+\frac{4}{x} \leqq 5 \quad (\because\ (2))$$

$$\iff \begin{cases} x>0 \\ x+\dfrac{4}{x} \leqq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ x^2-5x+4 \leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>0 \\ (x-1)(x-4) \leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ 1 \leqq x \leqq 4$$

である．(i) の範囲とあわせると

$$\begin{cases} y=0 \\ 1 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$$

となる．

(ii) $x^2+y^2=4$ のとき

$$\frac{x(x^2+y^2+4)}{x^2+y^2}=\frac{x(4+4)}{4}=2x$$

であるから

$$② \iff 2 \leqq 2x \leqq 5$$

$$\therefore\ 1 \leqq x \leqq \frac{5}{2}$$

である．(ii) の範囲とあわせると

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 1 \leqq x \leqq 2 \end{cases}$$

となる．

(i), (ii) より，点 (x,y) の満たす条件は

$$\begin{cases} y=0 \\ 1 \leqq x \leqq 4 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 1 \leqq x \leqq 2 \end{cases}$$

となる．

よって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は右図の太線部分となる．