$z \fallingdotseq 1$ である複素数 z に対して，$w = \dfrac{z+1}{1-z}$ とする．点 z が複素数平面の虚軸上を動くとき，次の問いに答えよ．

(1) w が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) $|w+i+1|$ の最大値と最小値を求めよ．

(18 静岡大 情報・理・工 1)

【答】

(1) 略

(2) 最小値 $\sqrt{2}-1$, 最大値 $\sqrt{2}+1$

【解答】

(1)
$$w = \frac{z+1}{1-z} \quad \cdots\cdots ①$$
$$z \text{ が虚軸上を動く} \iff z+\overline{z}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

w の描く図形は「①かつ②」を満たす z が存在するような w の集合である．

$$① \iff w(1-z)=z+1 \iff (w+1)z=w-1$$

$w=-1$ とすると $0z=-2$ となり不合理である．したがって $w \fallingdotseq -1$ である．

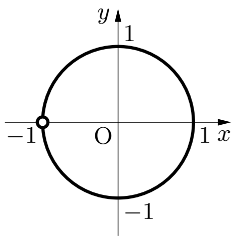
$$① \iff z=\frac{w-1}{w+1} \quad \cdots\cdots ①'$$

より

$$①' \text{ かつ } ② \iff \begin{cases} z=\dfrac{w-1}{w+1} & \cdots\cdots ①' \\ \dfrac{w-1}{w+1}+\dfrac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1}=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

ここで

$$③ \iff \frac{(w-1)(\overline{w}+1)+(w+1)(\overline{w}-1)}{|w+1|^2}=0$$
$$\iff \frac{2w\overline{w}-2}{|w+1|^2}=0$$
$$\iff \begin{cases} w+1 \fallingdotseq 0 \\ |w|=1 \end{cases}$$



よって，点 w の描く図形は，原点を中心とする半径 1 の円から，点 -1 を除いたものであり，右図となる． ……(答)

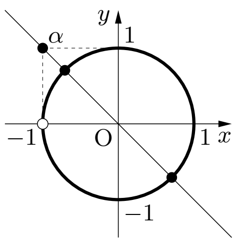
(2) $\alpha=-1-i$ とすると

$$|w+i+1|=|w-\alpha|$$

これは，点 α と点 w の距離を表すので，$|w-\alpha|$ は

3 点 α, w, 0 がこの順に一直線上に並ぶとき最小

3 点 α, 0, w がこの順に一直線上に並ぶとき最大



となるので

最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$ ……(答)

最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}+1}$ ……(答)

である．