数列 $\{a_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n^2+5n+6}{3^n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) $a_1$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$a_n$ を求めよ．

(3) $n \geqq 2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k a_k}$ を求めよ．

(18 工学院大 工・情報・先進工 3)

---

【答】

(1) $a_1 = 4$

(2) $a_n = -\dfrac{2n^2+4n}{3^n}$ $(n \geqq 2)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k a_k} = \frac{-n^2+n+4}{8(n+1)(n+2)}$

---

【解答】

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n^2+5n+6}{3^n}$$

(1) $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{1^2+5\cdot 1+6}{3^1} = \boldsymbol{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \frac{n^2+5n+6}{3^n} - \frac{(n-1)^2+5(n-1)+6}{3^{n-1}} \\ &= \frac{n^2+5n+6-3(n^2+3n+2)}{3^n} \\ &= \boldsymbol{-\frac{2n^2+4n}{3^n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k a_k} &= \frac{1}{3a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^k a_k} \\ &= \frac{1}{3\cdot 4} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k^2+4k} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{4}\left\{\frac{5}{6} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right\} \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{2n+3}{4(n+1)(n+2)} \\ &= \boldsymbol{\frac{-n^2+n+4}{8(n+1)(n+2)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

- (3) は $n=1$ のときも成り立つ．