2 つの曲線 $C1: y = x^3 - x^2 - 12x - 1$, $C2: y = -x^3 + 2x^2 + a$ (a は自然数) について考える．曲線 $C1$ と $C2$ が接するとき，a の値を求めよ．

(18 自治医大 21)

【答】 $a = 6$

【解答】

$$C1: y = x^3 - x^2 - 12x - 1$$

$$C2: y = -x^3 + 2x^2 + a$$

$f_1(x) = x^3 - x^2 - 12x - 1$，$f_2(x) = -x^3 + 2x^2 + a$ とおく．

$$f_1{}'(x) = 3x^2 - 2x - 12$$

$$f_2{}'(x) = -3x^2 + 4x$$

曲線 $C1$, $C2$ が接するということは

$$(*)\begin{cases} f_1(t) = f_2(t) & \text{(共有点をもつ)} \\ f_1{}'(t) = f_2{}'(t) & \text{(共有点における接線の傾きが等しい)} \end{cases}$$

を満たす実数 t が存在するということである．$(*)$ は

$$\begin{cases} t^3 - t^2 - 12t - 1 = -t^3 + 2t^2 + a \\ 3t^2 - 2t - 12 = -3t^2 + 4t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2t^3 - 3t^2 - 12t - 1 & \cdots\cdots ① \\ 6t^2 - 6t - 12 = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

となる．② を解くと

$$6(t+1)(t-2) = 0 \qquad \therefore \quad t = -1,\ 2$$

① に代入すると

$t = -1$ のとき　$a = -2 - 3 + 12 - 1 = 6$

$t = 2$ のとき　$a = 16 - 12 - 24 - 1 = -21$

a は自然数であるから，求める a の値は

$$\boldsymbol{a = 6} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．